Гильбертовы пространства

E — веществ. линейное пространство

Def. $(\cdot,\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 1)\ (x,y) = (y,x) \\ 2)\ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ 3)\ (x,x) \geq 0 \qquad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{cases}$$

$$|x| := \sqrt{(x,x)}$$

Упр. 1. $|(x,y)| \leq |x| \cdot |y|$ Нер-во Коши-Буняковского (-Шварца)

Упр. 2. Д-ть, что $|\cdot|$ — действительно норма.

$$|x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2$$

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) =$$

$$= |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2 \le |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2$$

Примеры. 1) $\cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{C}^n$, $(x,y) := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

1') $\mathbb{R}^2$ $[x,y] := (Ax, y)$

A $n \times n$ матрица, $A = A^T$

$A > 0$.

2). ℓ^2 $\qquad \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$

$$(x, y)_2 := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$ ⟵ проверить, что определение осмысленно.

$$|x|_2 = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

3). $C([a, b])$

$$\|u\|_\infty := \underset{t \in [a,b]}{\cancel{\sup}\ \max} |u(t)|$$

$$(u, v)_2 := \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_a^b |u|^2(x)\,dx}$$

4) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримое множество.

$L^2(\Omega)$ $\quad u : \Omega \to \mathbb{R}$ измеримых

$$\int_\Omega |u|^2(x)\,dx < +\infty$$

$$(u, v)_2 \doteq \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

$(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

$$(u, u) = \int_\Omega |u|^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow u(x) = 0$$

п.в. x.

$u = v$, если $u(x) = v(x)$ п.в. $x \in \Omega$.

E — (веществ.) лин. пр-во со скалярным произведением.

Упр 3 $\{ (\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ непрерывна. $|\cdot|$

Ортогональность 1). $u, v \in E$ $(u \perp v)$, если $(u, v) = 0$.

2). $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset E$ ортог. $u_\alpha \perp u_\beta$ при $\alpha \neq \beta$ (то есть $(u_\alpha, u_\beta) = 0$)

2'). ——, —— ортонорм., $\|u_\alpha\| = 1$.

Примеры. 1). R^n $e_i \perp e_j$

$\{e_1, \dots, e_n\}$

2). ℓ^2 $e_i = (0, \dots 0, 1, 0, \dots\dots)$ i-ая позиция

$(e_i, e_j) = 0 \quad , i \neq j \qquad (e_i \perp e_j)$

$|e_i| = \sqrt{1} = 1.$

3). $L^2(-\pi, \pi)$ $\qquad u : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^2(x)\,dx < +\infty.$$

$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$

$\sin kx, \cos kx, \dots \}$

$$(u,v)_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos jx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx\,dx = 0 \quad , \forall k.$$

kenn $k \neq j$.

$v(x) = \cos kx$ $\qquad \|v\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx} =$

$= \sqrt{\pi}.$

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$

Prop. 1. $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset E$ ортогональная система векторов

$u_\alpha \neq 0.$

Тогда u_α — линейно независимы.

Д-во: $\lambda_1 u_{\alpha_1} + \lambda_2 u_{\alpha_2} + \dots + \lambda_n u_{\alpha_n} = 0 \qquad \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0.$

$$\lambda_i (u_{\alpha_i}, u_{\alpha_i}) = 0$$

$$\lambda_i |u_{\alpha_i}|^2 = 0. \Rightarrow \lambda_i = 0.$$

$$u_{\alpha_i} \neq 0.$$

ч.т.д.

(!) вспомнить как построить φ_i

Prop 2. $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E$ лин. незав.

ортогонализ. Грама-Шмидта

Тогда $\exists \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E$ ортонормир.:

1) $f_n = b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + \ldots + b_n \varphi_n$

2) $\varphi_n = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n$

Сепараб. пространства (со скалярным произведением).

$E \quad (\cdot,\cdot) \quad |\cdot|$

E - сепараб., если $\exists \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E \quad \overline{\{y_i\}_{i=1}^{\infty}}^{|\cdot|} = E$

Prop. 3 $\left\{ E \text{ - сепараб.}, \quad \{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset E \text{ ортог.} \Rightarrow \right.$

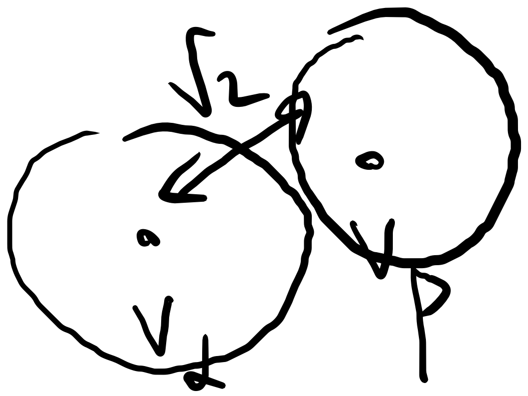
$\Rightarrow \{u_\alpha\}$ не более чем счетна.

Д-во: $\quad v_\alpha := \dfrac{u_\alpha}{|u_\alpha|} \qquad |v_\alpha| = 1.$

$\{v_\alpha\}$ - ортонормир. система.

$$|v_\alpha - v_\beta|^2 = \underbrace{|v_\alpha|^2}_{=1} - 2\underbrace{(v_\alpha, v_\beta)}_{=0} + \underbrace{|v_\beta|^2}_{=1} = 2.$$

$$|v_\alpha - v_\beta| = \sqrt{2}.$$



$$B_{1/2}(v_\alpha) \cap B_{1/2}(v_\beta) = \emptyset, \quad \alpha \neq \beta.$$

$$\overline{\{y_i\}} = E \Rightarrow \forall \alpha \ \exists i : y_i \in B_{1/2}(v_\alpha).$$

<u>Теор 4.</u> $\left\{ \begin{array}{l} E \quad (\cdot,\cdot),\ |\cdot| \text{ сепараб.} \Rightarrow \exists \{v_i\}_{i=1}^{N},\ N \leq +\infty \text{ ортонормир.} \\ \overline{\mathrm{span}\{v_i\}} = E. \end{array} \right.$

Топологич. базис пространства E.

Если E – комплексное лин. пр-во.

$$\cancel{0 \le (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \underbrace{(x,x)}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda^2 \geqslant 0}$$

$$\cancel{\lambda \in \mathbb{C}}$$

Def. $(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{C}$

1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ "эрмитовость"

2) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

3) $(x,x) \geqslant 0$ и $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$|x| := \sqrt{(x,x)}$$

Упр. $|(x,y)| \le |x| \cdot |y|$

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \bar{\lambda} (x, y).$$