



Программа учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения»

Утверждена Академическим советом
образовательной программы "Физика"
Протокол № _____ от _____ 2019 года

Разработчик	д.ф.-м.н., доцент Степанов Евгений Олегович, профессор факультета математики <small>ученая степень, фамилия имя отчество, должность</small>
Дата составления программы	24.07.19
Число кредитов	4 <small>заполняется на факультете по учебному плану</small>
Контактная работа (час.)	80 <small>заполняется на факультете по учебному плану</small>
Самостоятельная работа (час.)	72 <small>заполняется на факультете по учебному плану</small>
Курс, Образовательная программа	1 курс, 2 семестр <small>для какого курса, в каких модулях (семестрах) читается</small> ОП "Физика"
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса <small>С использованием онлайн курса/ без использования онлайн курса/иное</small>



1. Цель, результаты освоения дисциплины, пререквизиты

Курс «Дифференциальные уравнения» является одним из базовых математических курсов и призван познакомить студентов с широким кругом идей и методов решения и анализа дифференциальных уравнений, что имеет важнейшее значение для дисциплин физического цикла. Находясь на стыке сразу нескольких математических дисциплин, этот курс позволяет на содержательных примерах продемонстрировать работу методов математического анализа, алгебры и дифференциальной геометрии. Кроме того, изучая дифференциальные уравнения, слушатели на достаточно простом и наглядном уровне знакомятся с некоторыми важными разделами классической механики. Основная цель курса «дифференциальных уравнений» состоит в обучении студентов методам качественного анализа уравнений и знакомство их с типичными трудными ситуациями, возникающими при таком анализе.

Цели изучения дисциплины:

1. изучение теории дифференциальных уравнений и методов их решения;
2. получение навыков применения дифференциальных уравнений к практическим задачам.
3. знакомство с основными типами дифференциальных уравнений и методами их решения;
4. получение представления о типичных приложениях дифференциальных уравнений.

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, полученных студентами при освоении школьного курса математики, и знаний, полученных при освоении дисциплины математический анализ в объеме программы 1-го семестра (дифференцирование функций, простейшие интегралы).

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении дисциплин:

- Курсы общей и теоретической физики
- Математическая физика
- Профильных физических дисциплин.

2. Содержание учебной дисциплины

№ п/п	Название темы	Чи сл о ча со в			
			контактная работа (лекции, семинары,	онлайн компонента	самост. работа



		практикумы)		
1	Дифференциальное уравнение и его решение. Примеры физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.	4		5
2	Система дифференциальных уравнений первого порядка. Фазовая плоскость. Интегральные кривые. Поле направлений. Примеры уравнений, допускающих явные решения. Разделение переменных. Однородные дифференциальные уравнения.	14		10
3	Существование и единственность решения задачи Коши. Ломаные Эйлера. Продолжении решений. Неравенство Гронуолла. Зависимость решений от параметра. Неравенство Чаплыгина. Уравнение в вариациях.	12		10
4	Системы линейных дифференциальных уравнений. Однородные системы. Определитель Вронского. Неоднородные системы. Метод вариации постоянных. Системы с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента.	10		6
5	Двумерные системы с постоянными коэффициентами, классификация особых точек.	12		5
6	Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Сведение дифференциального уравнения произвольного порядка к системе дифференциальных уравнений. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Неоднородные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных. Подбор частных решений для уравнений с постоянными коэффициентами. Краевые задачи для уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.	12		10
7	Устойчивость по Ляпунову. Функция Ляпунова. Дифференцирование вдоль векторного поля. Исследование устойчивости по первому приближению.	8		10
8	Стабилизируемость дифференциальных систем. Пример: регулятор Уатта.	4		10



	Критерий Михайлова. Управляемость и наблюдаемость линейных систем.			
9	Примеры уравнений в частных производных первого порядка. Метод характеристик. Задача Коши для транспортного уравнения.	4		6
ИТОГО:		80		7 2

3. Оценивание

Тип контроля	Форма контроля	Параметры
Текущий контроль	Контрольная работа 1	Письменная работа 80 мин. Проводится на 4-7 неделе семестра.
Текущий контроль	Контрольная работа 2	Письменная работа 80 мин. Проводится в течение последних 10 недель семестра.
Текущий контроль	Контрольная работа 3	Письменная работа 80 мин. Проводится в течение последних 6 недель семестра. Обязательна только для тех, кто не писал, либо не получил удовлетворительной оценки по любой из первых двух контрольных, для всех остальных выполняется по желанию. Содержит задачи по всему материалу курса.
Итоговый контроль	Финальный коллоквиум	Опрос по теории (1-2 теоретических вопроса) и решение задач. Обязателен только для получения итоговой оценки 9, 10.

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Оценка контрольной работы:

Производится одним из следующих способов:

1 способ оценивания

За каждую задачу в задании назначается определенное количество баллов (в сумме 10 баллов за контрольную), эти баллы сообщаются при раздаче задач. При оценивании суммируются баллы за верно решенные задачи. За задачи, решенные с недочетами в обоснованиях или незначительными ошибками, может быть начислено уменьшенное количество баллов.

2 способ

8-10 решены верно все задачи (возможны небольшие недочеты в обоснованиях или вычислениях, чем и обусловлено различие в начисляемых баллах);

6-7 решены верно не менее $\frac{2}{3}$ всех задач;



4-5 решены верно не менее половины всех задач.

Оценка ответа на финальном коллоквиуме (в конце семестра)

8-10 – выполнен критерий сформированности компетенций; обучающийся знает все определения (из части курса, прочитанной в данном и предыдущих семестрах), умеет приводить примеры, знает и понимает формулировки и доказательства всех теорем. Верно и с подробными обоснованиями решает задачи билета. Различие в начисляемых баллах связано с тем, что возможны отдельные неточности в формулировках или доказательствах, которые исправляются самостоятельно (при указании на их наличие) или не искажают смысл.

6-7 – выполнен критерий сформированности компетенций; обучающийся знает все определения и формулировки теорем (из части курса, прочитанной в данном и предыдущих семестрах), может привести основные примеры, знает и понимает доказательства основных теорем (из части курса, прочитанной в данном семестре), может решить задачи билета самостоятельно или при незначительной помощи преподавателя.

4-5 – выполнен критерий сформированности компетенций; обучающийся знает и понимает все определения (всего прочитанного курса) и все формулировки теорем (хотя бы из данного семестра), может привести простейшие примеры, знает и понимает отдельные доказательства.

Критерии сформированности компетенций

Компетенции сформированы (в части связанной с применением методов дифференциальных уравнений), если обучающийся

- получил оценки не ниже 4 баллов по 10-балльной шкале за любые две из написанных контрольных работ, либо
- получил оценку не ниже 6 баллов за третью контрольную работу.

Итоговая оценка за работу в семестре (накопленная оценка).

При условии выполнения критерия сформированности компетенций накопленная оценка (НО) равняется

- если хотя бы по одной из первых двух контрольных получена положительная оценка (не менее 4 баллов): средней по всем формам текущего контроля, то есть по всем написанным контрольным работам, с округлением до целого числа баллов, но не более 8 баллов;
- если по каждой из первых двух контрольных не получено положительной (не менее 4 баллов) оценке: оценке за третью контрольную работу, уменьшенной на 2 балла, но не более 7 баллов.

Округление при вычислении средней оценки производится по арифметическим правилам, за исключением случаев, когда по первой или второй из написанных контрольных работ оценка не превышает 5 баллов. В последнем случае округление производится в меньшую сторону. Если критерий сформированности компетенций не выполнен, накопленная оценка принимается равной нулю.



Итоговая оценка за семестр

Если накопленная оценка не превышает 6 баллов, то итоговая оценка выставляется только по результатам текущего контроля в течение семестра и равна накопленной оценке.

Если накопленная оценка 7 баллов и выше, то обучающийся может по желанию либо получить итоговую оценку, равную накопленной (в пределах 8 баллов) без сдачи финального коллоквиума, либо сдать финальный коллоквиум. В последнем случае в качестве итоговой оценки выставляется оценка за финальный коллоквиум, независимо от накопленной оценки.

Для получения итоговой оценки от 9 до 10 баллов, необходимо

1. иметь накопленную оценку за работу в течение семестра не ниже 7 баллов,
2. иметь оценку не ниже 5 баллов по любым двум из трех контрольных работ,
3. сдать финальный коллоквиум по окончании курса на оценку 9-10 баллов.

Пересдача при неудовлетворительной итоговой оценке за семестр

При неудовлетворительной итоговой оценке за семестр обучающийся может пересдать курс. Для этого ему необходимо решить выданное домашнее задание. Собственно пересдача состоит из

1. краткого коллоквиума по решенным задачам из выданного домашнего задания, цель которого убедиться в том, что задачи решены правильно, самостоятельно, и решения поняты студентами,
2. контрольной работы 80 мин по всему материалу курса.

За пп. 1 и 2 выставляется оценка по десятибалльной шкале, при этом итоговая оценка равна средней с весами 20% и 80% (за пп. 1 и 2, соответственно), но не более 8 баллов, при условии, что за п. 1 оценка не ниже удовлетворительной.

Для получения на пересдаче оценки 9 или 10 баллов необходимо получить 8 баллов в качестве итоговой по пп. 1 и 2, ответить на устные вопросы по курсу и решить дополнительную задачу.

4. Примеры оценочных средств

Блокирующие элементы не предусмотрены.

Пример контрольной работы 1

1. Решить уравнение: $y' = 2xy + x$. Исследовать качественную картину поведения траекторий.
2. Исследовать качественную картину поведения траекторий дифференциального уравнения $y' = 2t(1+y^2)$ в зависимости от начальных данных. Изобразить ее на плоскости (t, y) .
3. Решить уравнение в дифференциалах: $(x^2 - y)dx + x(y + 1)dy = 0$.
4. Решить уравнение методом введения параметра: $(y')^2 - (y')^3 = y^2$.

Пример контрольной работы 2

1. Решить уравнение $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} x$.
2. При каких k и w уравнение $y'' + k^2y = \sin(wt)$ имеет хотя бы одно периодическое решение?



3. Начертить на фазовой плоскости траектории системы $x'=1-x^2-y^2$, $y'=2x$ и исследовать особые точки.

Пример контрольной работы 3

Данная контрольная работа содержит задачи по всему курсу, подобные указанным в типовых 1 и 2 контрольных.

Примерный список вопросов к финальному коллоквиуму

- 0*. Компактность множеств в нормированных пространствах. Теорема Асколи-Арцела.
1. Теорема Пеано (локальное существование решений ОДУ). Ломаные Эйлера.
 2. Неравенство Гронуолла.
 3. Теорема сравнения (неравенство Чаплыгина).
 4. Теорема о локальной единственности решений.
 5. Продолжимость решений. Максимальный интервал существования решения.
 6. Теорема о глобальном существовании решения.
 7. Непрерывная зависимость решений ОДУ от параметров и от начальных данных.
 8. Дифференцируемость решений ОДУ по параметрам и по начальным данным. Уравнение в вариациях.
 9. Линейные системы ОДУ. Существование, единственность решений. Фундаментальная система решений однородной системы.
 - 10*. Формула Якоби.
 11. Вронскиан линейной системы ОДУ. Формула Остроградского-Лиувилля.
 12. Метод вариации произвольных постоянных.
 - 13* Матричная экспонента.
 14. Линейные системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Общее решение. Классификация стационарных точек для двумерных систем.
 15. Скалярное линейное уравнение n -го порядка. Существование, единственность решений задачи Коши. Фундаментальная система решений однородного уравнения.
 16. Вронскиан скалярного линейного уравнения n -го порядка. Формула Остроградского-Лиувилля.
 17. Скалярное линейное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен и общее решение однородного уравнения.
 18. Скалярное неоднородное линейное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.
 19. Скалярное неоднородное линейное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения.
 20. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Устойчивость стационарного решения линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. Теорема об устойчивости по первому приближению и теорема о линеаризации.
 21. Регулятор Уатта. Исследование устойчивости по первому приближению.
 - 22*. Критерий Эрмита-Михайлова.
 23. Интегралы нелинейных систем. Производная по направлению векторного поля. Периодические решения автономных ОДУ и предельные циклы.
 24. Линейное транспортное уравнение и его решение методом характеристик.

* - дополнительные вопросы

Типовой билет на финальном коллоквиуме

Типовой билет содержит 1 вопрос и 1-2 задачи тех типов, которые предлагались на контрольных или разбирались на семинарах.



5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

№ п/п	Наименование
1	Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., УРСС, 2004
2	Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. – Ижевск, РХД, 2000 (любое издание).

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

№ п/п	Наименование
	Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск, Ижевская республиканская типография, 2000 (и более поздние издания).
	Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, МЦНМО, 2012.
	Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979 (и более поздние издания).
	Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., УРСС, 2003.
	Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959 (и более поздние издания).
	P. Hartman. Ordinary Differential Equations . John Wiley and Sons, 1964 (ed. 1982)

5.3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование



5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционная аудитория с доской и проектором.

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося), а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

- 6.1. для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.
- 6.2. для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.
- 6.3. для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

7. Дополнительные сведения