$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$

$f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$

$(x_0, y_0) \in D$

Th (Пеано), D - откр.

$f \in C(D; \mathbb{R}^n)$

~~Тогда~~ $\exists\, \delta > 0 : \exists\ y : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$

- решение $(*)$

$y \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta), \mathbb{R}^n)$

Отступление.

1°) Метрические пространства.

$$\left(X,\ \rho : X \times X \to [0, +\infty)\right)$$

X — множество $\neq \varnothing$; ρ — "расстояние" ("метрика")

1°) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$

2°) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

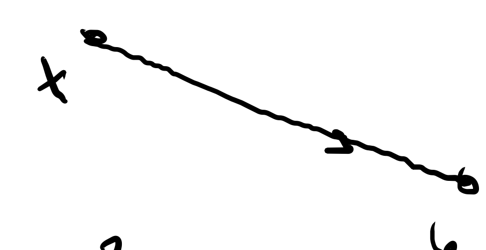
нер-во треугольника $\rightsquigarrow$ 3°) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Примеры.

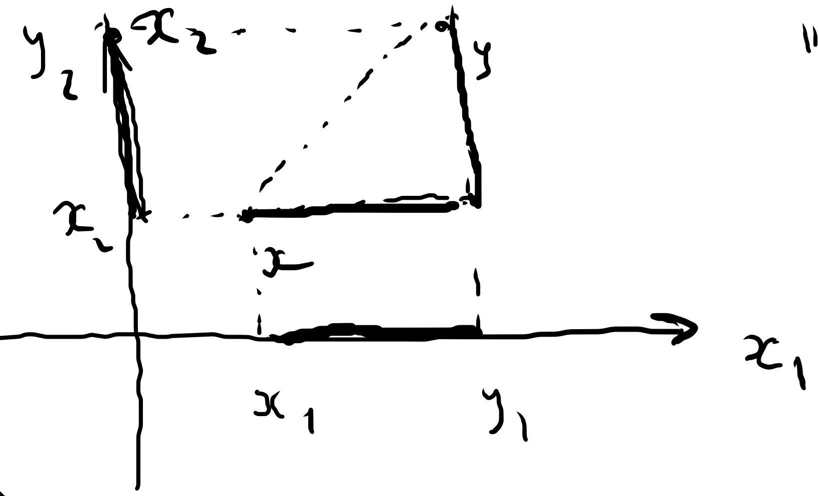
1). $\mathbb{R}$, $\rho(x,y) := |x-y|$

2). $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$
$\rho(x,y) := |x-y|$

3). $\mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) :=$
$|x-y|$



4). $\mathbb{R}^2$, $\rho(x,y) :=$
$= |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$



"Manhattan distance"

$$B_R(x) \subset X$$
$$\shortparallel$$
$$\{y \in X : \rho(y,x) < R\}$$

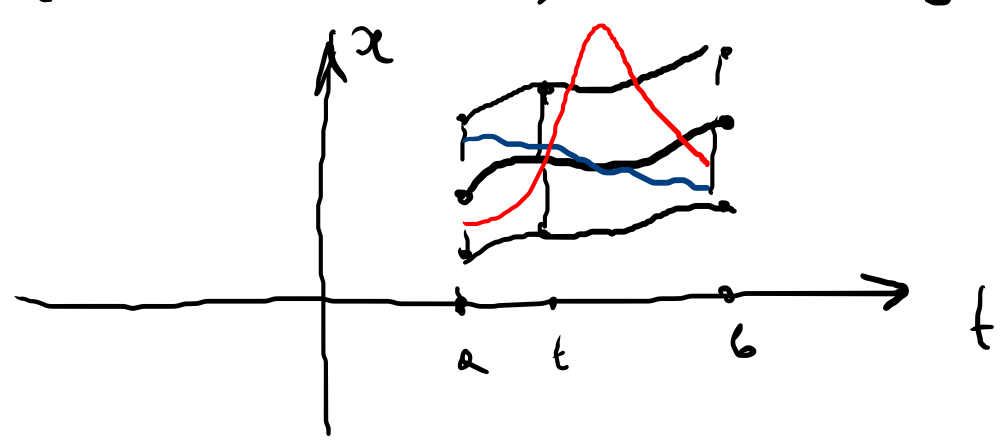
5) $X \neq \emptyset$ произвольное.

$$\rho(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

"дискретное расстояние"

6) $C([a,b]; \mathbb{R}^n)$

$$\rho(x(\cdot), y(\cdot)) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$



$$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x \iff \rho(x_k, x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall k > N \quad \rho(x_k, x) < \varepsilon$$

$$|x_k(t) - x(t)| < \varepsilon$$
$$\forall t \in [a,b]$$

равномерная сходимость

$$x_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} x$$

$\{x_k\} \subset X, \ \rho$

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \iff \lim_{k\to\infty} \rho(x, x_k) = 0$$

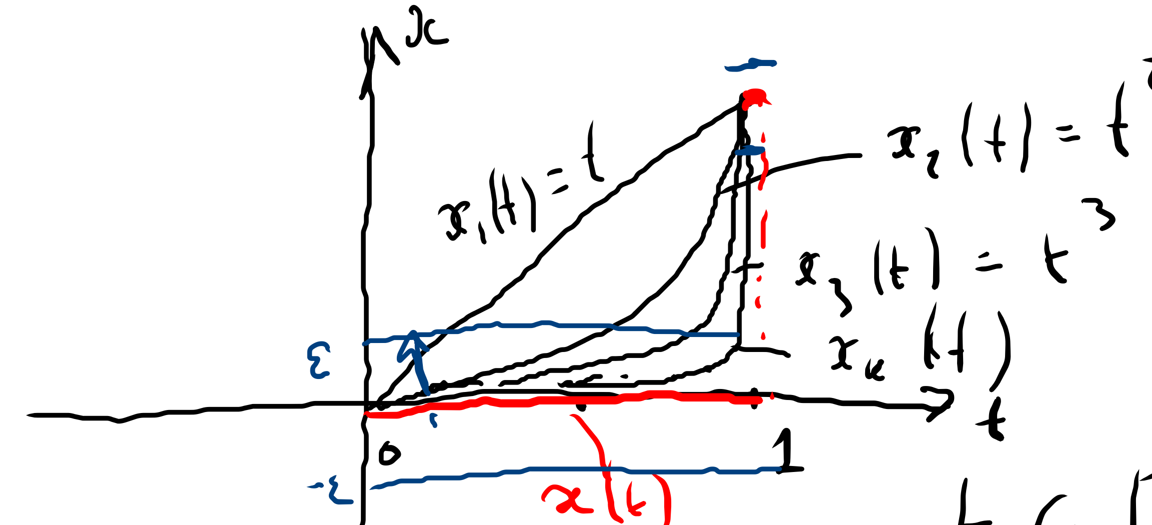
Упражнения.

1°) $[a,b] := [0,1]$

$x_k(t) := t^k$

$x_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} x(t)$

поточечно.



$$x(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0,1) \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

разрывна

равном. сходимости нет!

2° $x_k \rightrightarrows x$ $x_k \in C([a,b]; \mathbb{R}^n)$

Тогда $x \in C([a,b]; \mathbb{R}^n)$

Фундамент. послед. (X, ρ)

$\{x_k\} \subset X$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 :$

$\forall m, n > N$

$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$

послед. Коши

(фундамент.)

Пример.

1) $\mathbb{R}, |x-y|$

полное.

Def. (X, ρ) полное, если у $\{x_k\} \subset X$ фундам. следует $\exists x \in X : \lim_{k \to \infty} x_k = x.$

2). $X = [a, b]$ $\qquad \rho(x, y) := |x - y|$

полное!

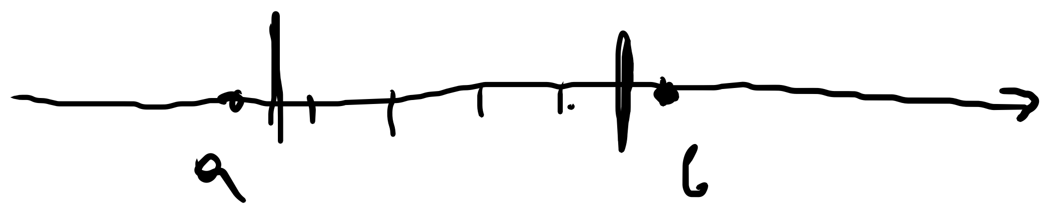
$\{x_k\} \subset X$ — фундам.

$|x_m - x_n| \to 0$

$m, n \to \infty$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}:$

$\lim\limits_{k} x_k = x.$



$a \le x \le b \Rightarrow x \in X$

3). $\mathbb{R}^n$, $\rho(x, y) := |x - y|$ полное.

<u>Lm.</u> 1 $\left\{ C([a,b]; \mathbb{R}^n),\ \rho(x, y) := \sup\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| \right.$ полное.

<u>Д-во:</u> $\{x_k\} \subset C([a,b]; \mathbb{R}^n)$ $\qquad \rho(x_m, x_n) \to 0,$

$m, n \to \infty$

Рассм. фикс. $t \in [a, b]$.

$$\{x_k(t)\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\sup_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| \to 0, \quad m, n \to +\infty$$

$$|x_m(t) - x_n(t)| \to 0, \quad m, n \to +\infty$$

$\{x_k(t)\}$ – фундаментальная в $\mathbb{R}^n$

$$\exists\, x(t) = \lim_{k \to +\infty} x_k(t)$$

точка в $\mathbb{R}^n$

Тем самым определена функция $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$$x(t) := \lim_{k} x_k(t)$$

$x_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} x(t)$, но, более того

$x_k(\cdot) \rightrightarrows x(\cdot)$ равномерно

Убедимся в этом.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0 : \ \forall m, n > N$

(1) $$|x_m(t) - x_n(t)| \le \varepsilon \quad \forall t \in [a,b]$$

В (1): перейдём к пределу по $n \to +\infty$

$$|x_m(t) - x(t)| \le \varepsilon \quad \forall t \in [a,b],$$ то есть $x_m \rightrightarrows x$.

Тогда $x \in C([a,b]; \mathbb{R}^n)$, ч.т.д.

ε - сети

(X, ρ) - метрическое пр-во.

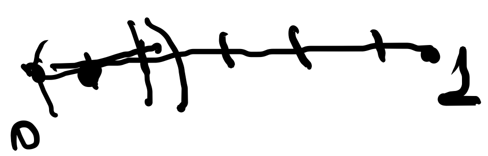
$E \subset X$ - ε - сеть X, $\varepsilon > 0$, если

$\forall x \in X \quad \exists y \in E : x \in B_\varepsilon(y)$.

/иначе говоря $\bigcup\limits_{y \in E} B_\varepsilon(y) = X$ /

Примеры.

1). $X = [0, 1]$



$E := \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$

/ $\frac{1}{4}$ - сеть.

$\varepsilon = \frac{1}{4}$.

2) Упражнение: придумайте другие

Lm 2. (X, ρ) полное метрич. пр-во, такое, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad E_\varepsilon \subset X, \quad \# E_\varepsilon < +\infty,$

E_ε - ε-сеть $\underline{X}$.

Тогда, $\forall \{x_k\} \subset X \quad \exists \{x_{k_l}\} : \lim\limits_{l \to +\infty} x_{k_l} = x,$

$x \in \underline{X}$.

Д-во. 1) $\varepsilon = 1$. $\# E_1 < \infty$, $E_1 \subset X$.

$\bigcup\limits_{y \in E_1} B_1(y) = X \qquad \{x_k^{(1)}\} \subset B_1(y_1), \quad y_1 \in E_1.$

2). $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\# E_{1/2} < \infty$, $E_{1/2} \subset X$

$\bigcup\limits_{y \in E_{1/2}} B_{1/2}(y) = X \qquad \{x_k^{(2)}\} \subset B_{1/2}(y_2). \quad y_2 \in E_{1/2}$

3). $\varepsilon = \frac{1}{4}$ $\quad F_{1/4} \subset X$,

$y_3 \in F_{1/4}$ $\quad \{x_k^{(3)}\} \subset B_{1/4}(y_3)$

$\vdots$

m) $\varepsilon = \frac{1}{2^{m-1}}$, $\quad F_{1/2^{m-1}} \subset X$

$y_m \in F_{1/2^{m-1}}$ $\quad \{x_k^{(m)}\} \subset B_{1/2^{m-1}}(y_m)$

$\vdots$

$$\{x_k\}$$

$$\cup$$

$$\{x_k^{(1)}\} = x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots$$

$$\cup$$

$$\{x_k^{(2)}\} = x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots$$

$$\cup$$

$$\{x_k^{(m)}\} = x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots$$

$$\{x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(m)}, \dots\} \subset \{x_k\}$$

$$\forall m > N \quad x_m^{(m)} \in B_{1/2^{N-1}}(y_N)$$

$$\rho(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) \le \rho(x_m^{(m)}, y_N) + \rho(x_n^{(n)}, y_N) \le$$

$$m, n > N$$

$$\le \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{1}{2^{N-2}} \to 0$$

$$N \to +\infty.$$

Иначе казано, $\{x_m^{(m)}\}$ - фундам.

Но (X, ρ) - пълно $\Rightarrow \exists\, x \in X$:

$$\lim_{m \to \infty} x_m^{(m)} = x,$$

к.т.д.