Степанов Евгений Олегович

ОДУ.

$$y = y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)) \qquad x \in \mathbb{R} \quad (t \in \mathbb{R})$$

вектор состояния $y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \cancel{y \in \mathbb{R}^n}$

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(\underset{\in \mathbb{R}}{x}, \underbrace{y(x)}_{\in \mathbb{R}^n}), \quad f: \underline{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$f(\cdot) = (f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot))$$

$$(1') \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(\text{---} , \text{---}) \\ \quad \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

Задача Коши

(1) $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$

Пример 1 $z(\cdot) \in \mathbb{R}$ $\frac{dz}{dx} = e^x$

$z(x) = e^x + C$ $C \in \mathbb{R}$ любая константа.

(2) $y(x_0) = y_0$ $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$ / $(x_0, y_0) \in D$ /

начальные усл.

? Пример 2. $\ddot{x} + x = \sin t$, $x(\cdot) \in \mathbb{R}$
$x = x(t)$

(ур-е колебаний гармонического осциллятора)

$$y_1(t) = x(t)$$
$$y_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 + y_1 = \sin t. \end{cases}$$

$$\ddot{x}(t) = \dot{y}_2$$
$$y_2(t) = \dot{y}_1$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 + \sin t. \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + \sin t \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{f(t,\, y_1,\, y_2)}$$

Пример 3.

$y(\cdot) \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \qquad f(x,y) = y^2$$

автономное ДУ

1). $y \equiv 0$ — решение

2) $\frac{dy}{y^2} = dx$

$$-\frac{1}{y} = x - C$$

$$y = -\frac{1}{x-C} = \frac{1}{C-x}$$

Теория существования решений задачи Коши.

•) $A \subset \mathbb{R}^m$ откр., если $\forall z \in A$ $\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(z) \subset A$.

•) $C \subset \mathbb{R}^m$ замкн., если $x_n \in C$, $x_n \to x \Rightarrow x \in C$

Th 1 (Пеано) $f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(локальное существ. реш.) открытое

$f \in C(D, \mathbb{R}^n)$, $(x_0, y_0) \in D$.

Тогда $\exists \delta > 0$ $\exists y: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Пример 4.

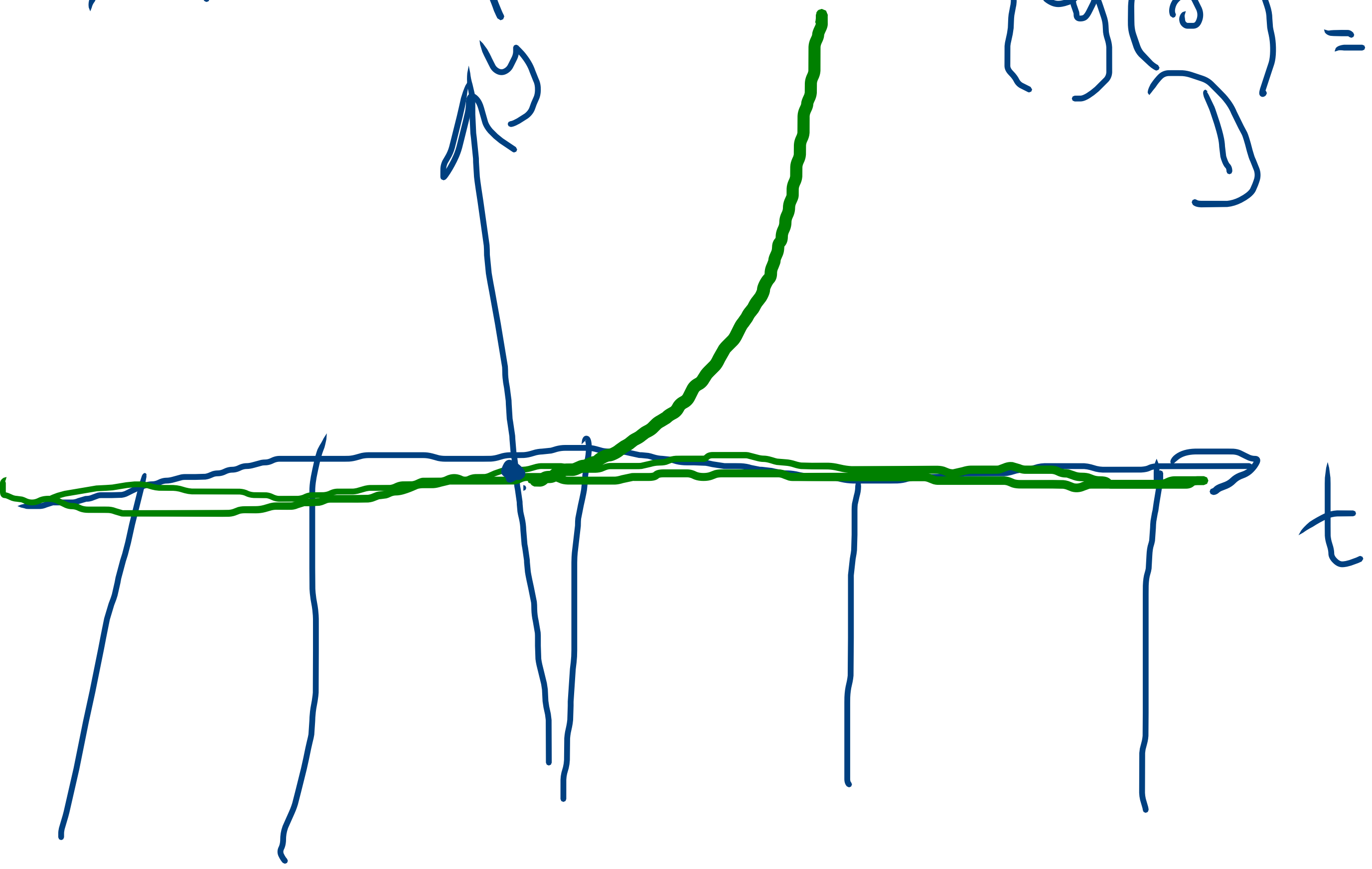
$$\begin{cases} \dot{y} = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$y = y(t) \in \mathbb{R}$

$f = f(y) = \sqrt{y}$

$D = \mathbb{R} \times \{y \geq 0\}$

замкн.



1) $y \equiv 0$

2) $\dfrac{dy}{\sqrt{y}} = dt$

$2\sqrt{y} = t + C.$

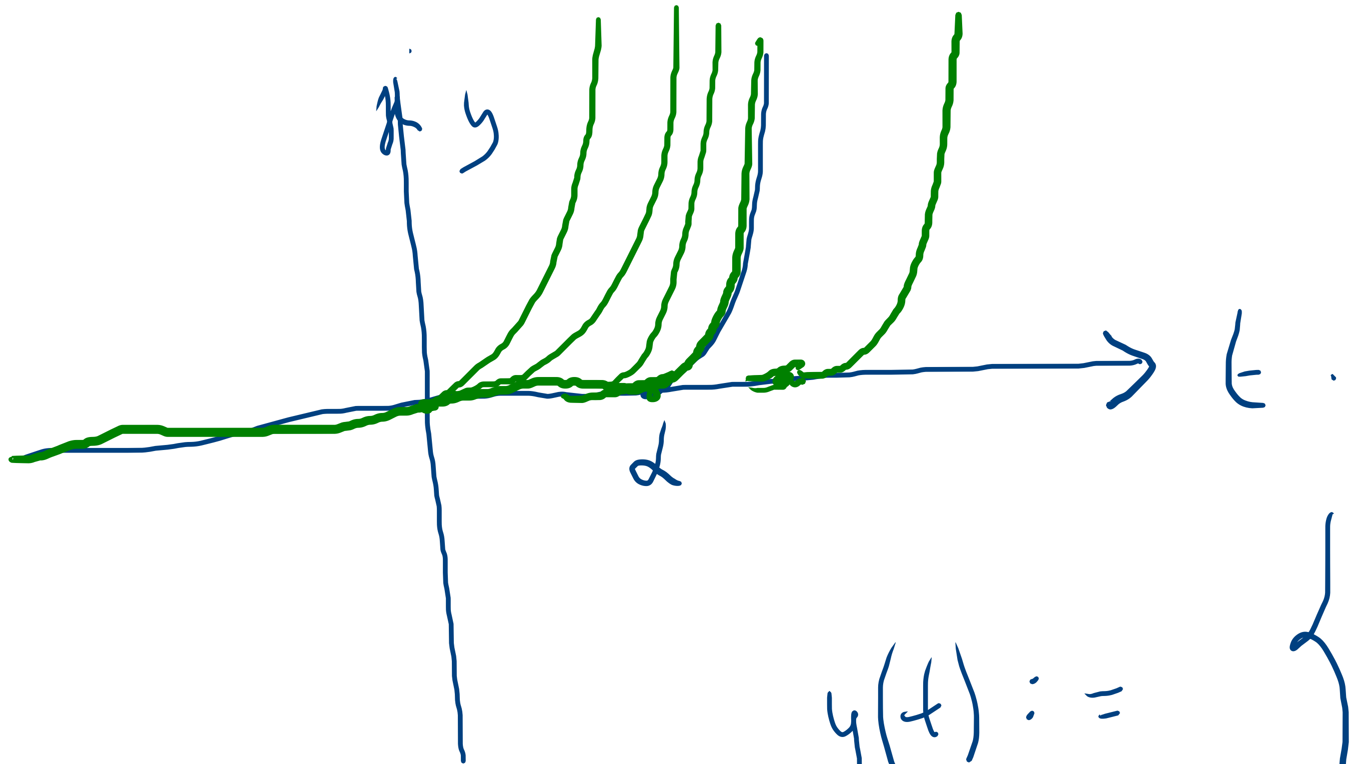
$y = \left(\dfrac{t+C}{2}\right)^2.$

$0 = y(0) = \dfrac{C^2}{2} \Rightarrow C = 0$

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$C(X;Y)$

3)



$\alpha \geqslant 0$ произв.

$$y(t) := \begin{cases} \dfrac{(t-\alpha)^2}{4}, & t \geqslant \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases}$$

$|\cdot|$ — длина вектора (евклидова норма)

Th (о единственности реш. задачи Коши)

$f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad f \in C(D; \mathbb{R}^n)$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K |y_1 - y_2| \quad (*)$$

$K > 0.$

$(x_0, y_0) \in D$

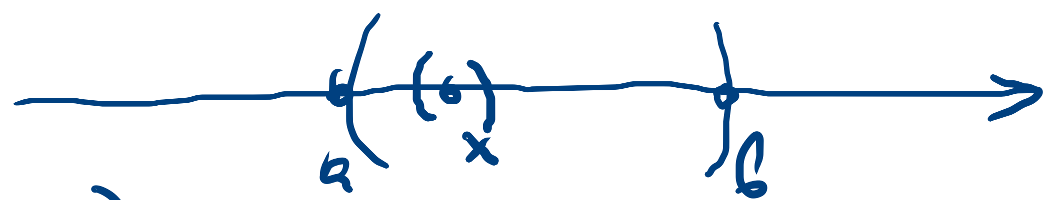
$\Rightarrow$ реш. задачи Коши (1), (2) единств.

Усл. Липшица.

Примеры откр. и замкн. множеств.

1) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ замкн.

2) $(a, b) \subset \mathbb{R}$ откр.



3) $[a, b)$ — ни замкн., ни откр.

4) $B_R(a) \subset \mathbb{R}^2$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a| < R\}$$

откр.

5) $\overline{B_R(a)} \subset \mathbb{R}^2$

замкн.

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a| \le R\}$$