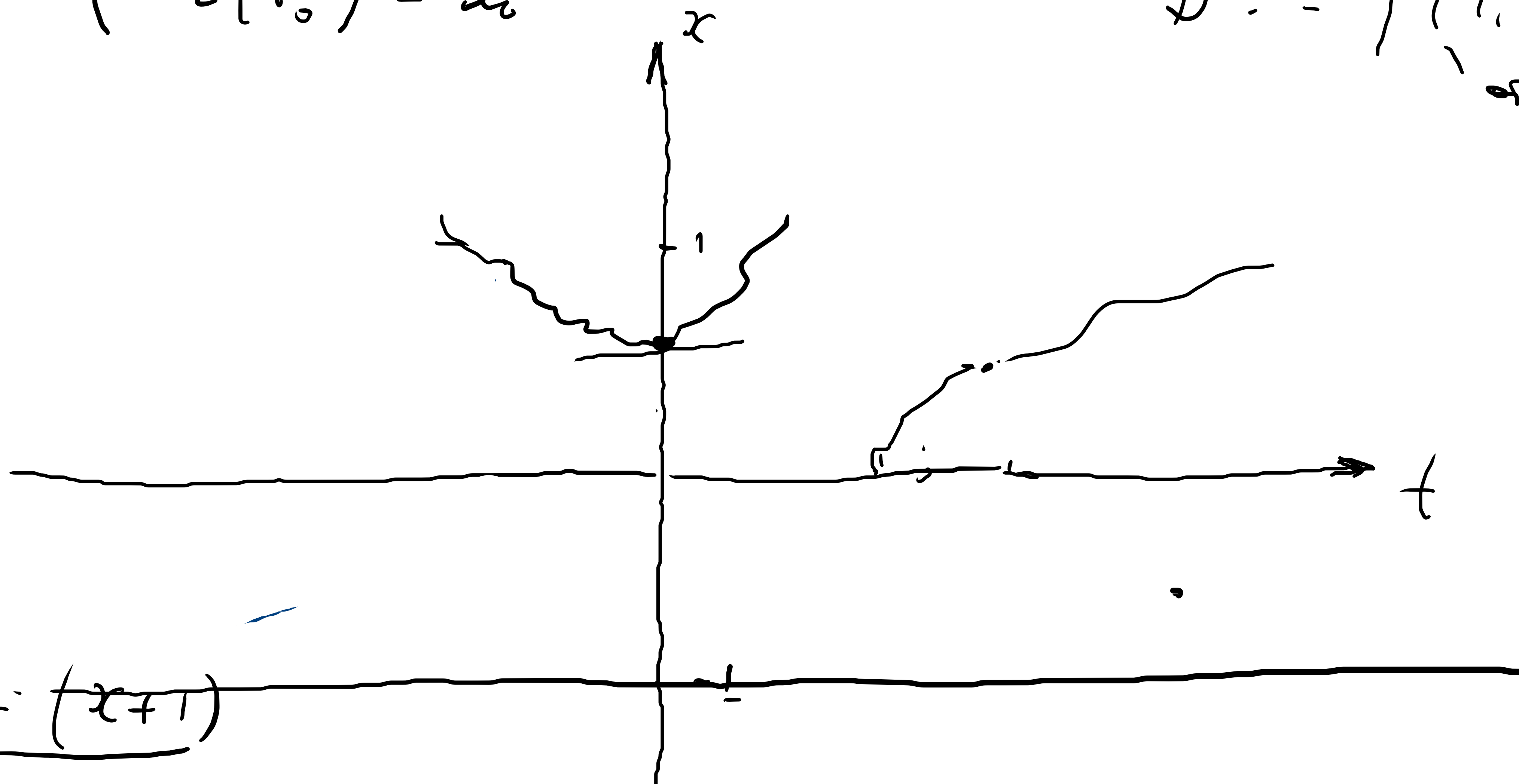
①
$$\begin{cases} \dot{x} = t\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$f(t,x) = t\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$D := \{(t,x) : x \neq 0\}$ — открытое.



1). $\dot{x} = \frac{t(x+1)}{x}$

$x = c \qquad 0 = \dot{c} = \frac{t(c+1)}{c}$

$c = -1 \Rightarrow x(t) \equiv -1$ — решение

2). $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) = -t/x^2 \Rightarrow \forall (t_0, x_0) \in D$

вып. усл. теор. существ. и единств.

Траектории НЕ пересекаются!

3). $y(t) := x(-t)$

$$\dot{y}(t) = -\dot{x}(-t) = -\left(-t\left(1+\frac{1}{x(-t)}\right)\right) =$$

$$= t\left(1+\frac{1}{y(t)}\right).$$

$\Rightarrow y(\cdot)$ – тоже решение уравнения.

(и задачи Коши $y(t_0) = x(-t_0)$).

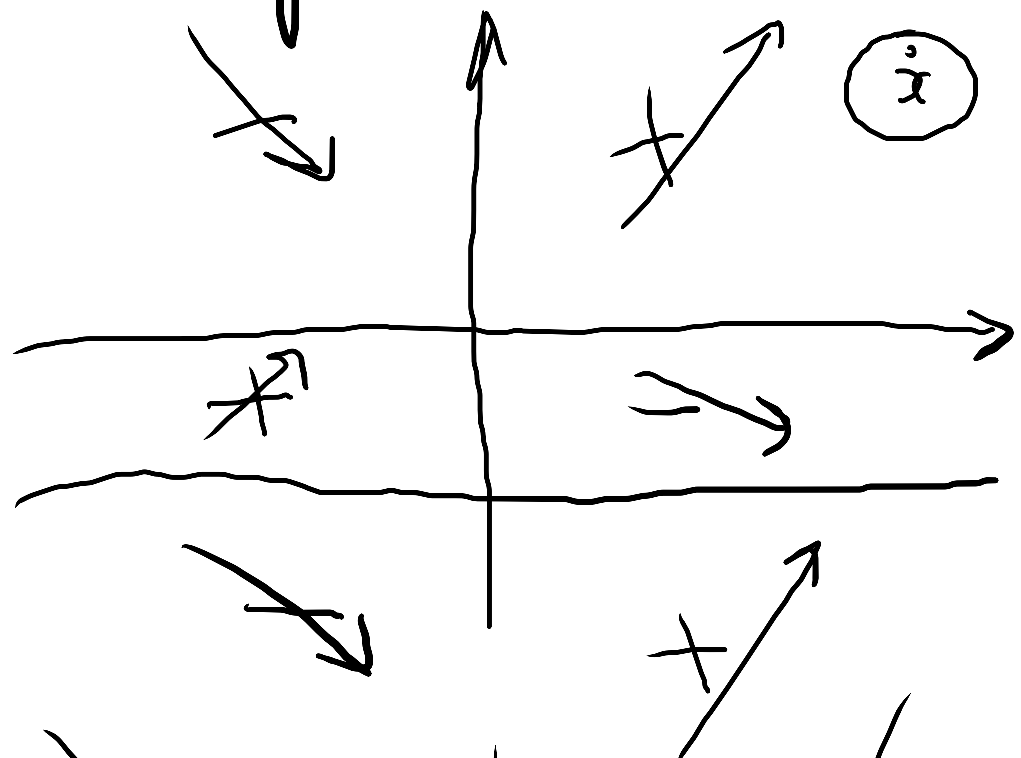
Иначе говоря, картина траекторий симметрична отн. оси X.

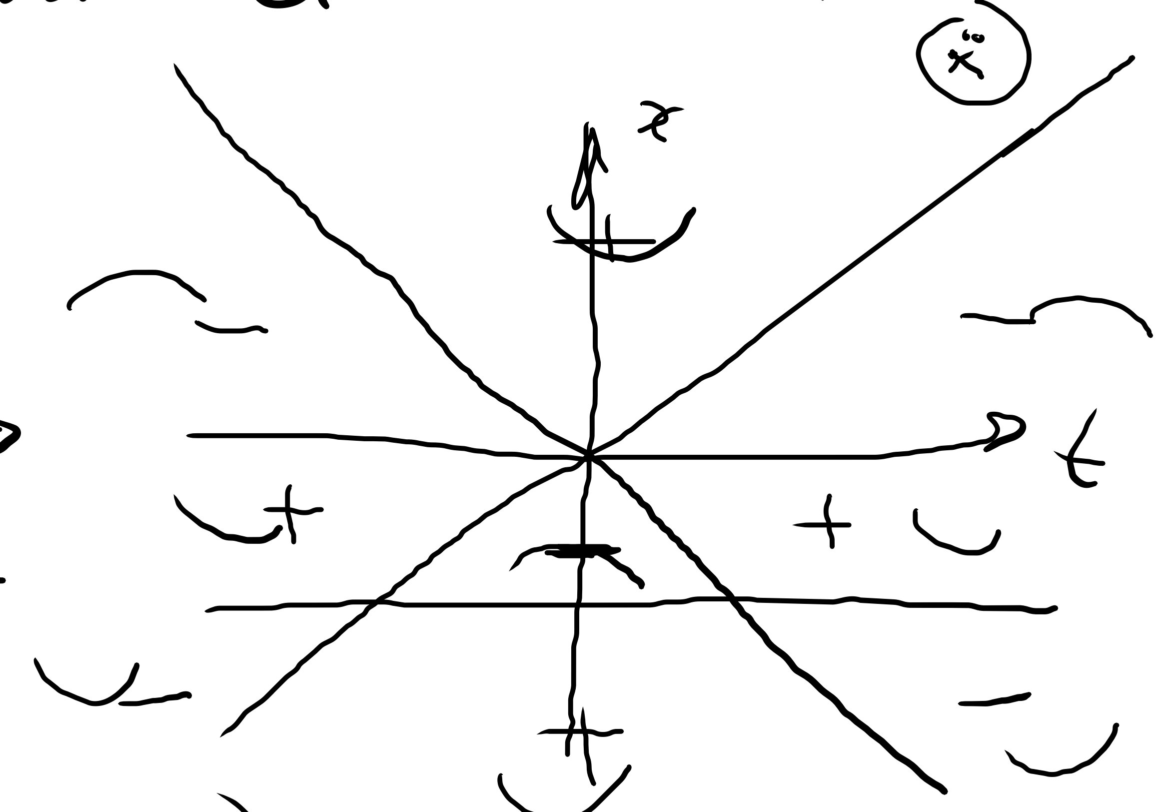
4) $t_k \to 0$, $x(t_k) \not\to 0$, $x(t_k) \to a$.

$$\dot{x}(t_k) = t_k\left(1 + \frac{1}{x(t_k)}\right) \to 0.$$

$t_0 = 0$, $x_0 \neq 0$. $\Rightarrow$ реш. симметрично отн. оси x.

5). $\dot{x} = t\left(\frac{x+1}{x}\right)$





6). $$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(t\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = 1 + \frac{1}{x} + t\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\dot{x}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{x} - t\,\frac{\dot{x}}{x^2} = 1 + 1/x - \frac{t}{x^2}\,t\left(1 + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{t^2}{x^2}\right) = \frac{(x+1)(x^2 - t^2)}{x^3} = \frac{(x+1)(x-t)(x+t)}{x^3}$$

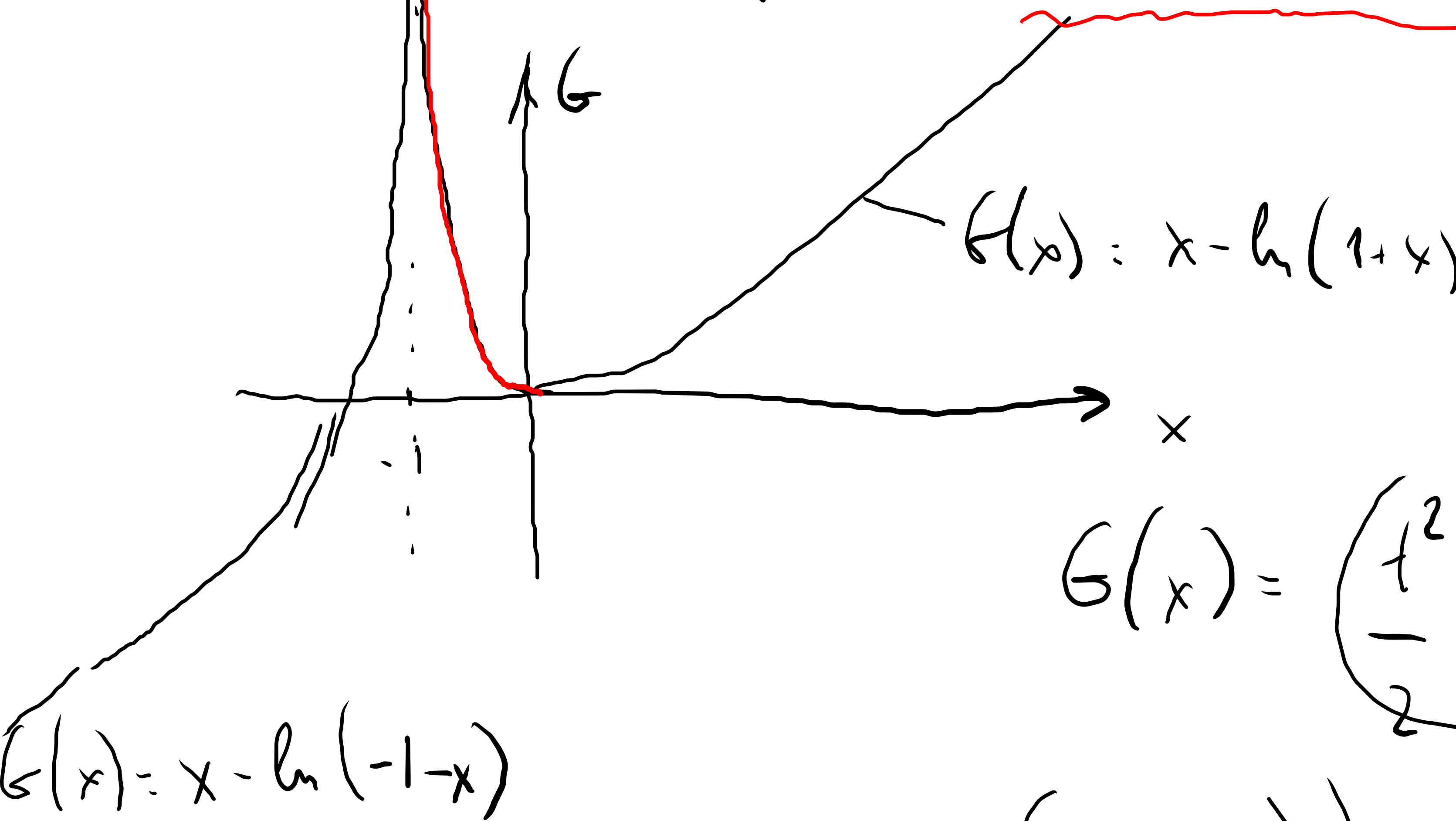
7). $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1+x}{x}\, t. \iff \displaystyle\int_{x_0}^{x} dy \cdot \frac{y}{1+y} = \int_{t_0}^{t} s\, ds$

$$\int_{x_0}^{x} dy \left(\frac{1+y-1}{1+y} \right) = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}$$

$$\underbrace{y - \ln|1+y|}_{G(y)} \Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} dy \left(1 - \frac{1}{1+y} \right)$$

$$\boxed{G(x) - G(x_0) = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}, \text{ где } G(y) := y - \ln|1+y|}$$

Случай 1. $x_0 > 0$. Тогда $x(t) > 0$



$G(x) = x - \ln(1+x)$

$G'(x) = \frac{x}{1+x}$

(при $x \gg 1$ $G(x) \approx x$).

$$G(x) = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} + G(x_0) =: F(t) \qquad (1)$$

$G([0,+\infty)) = [0,+\infty) \Rightarrow F(t)$

$F(\mathbb{R}) = \left[-\frac{t_0^2}{2} + G(x_0), +\infty\right)$.

$6(x_0) = \frac{t_0^2}{2}$

Случай 1.1. $-\frac{t_0^2}{2} + 6(x_0) \geq 0$

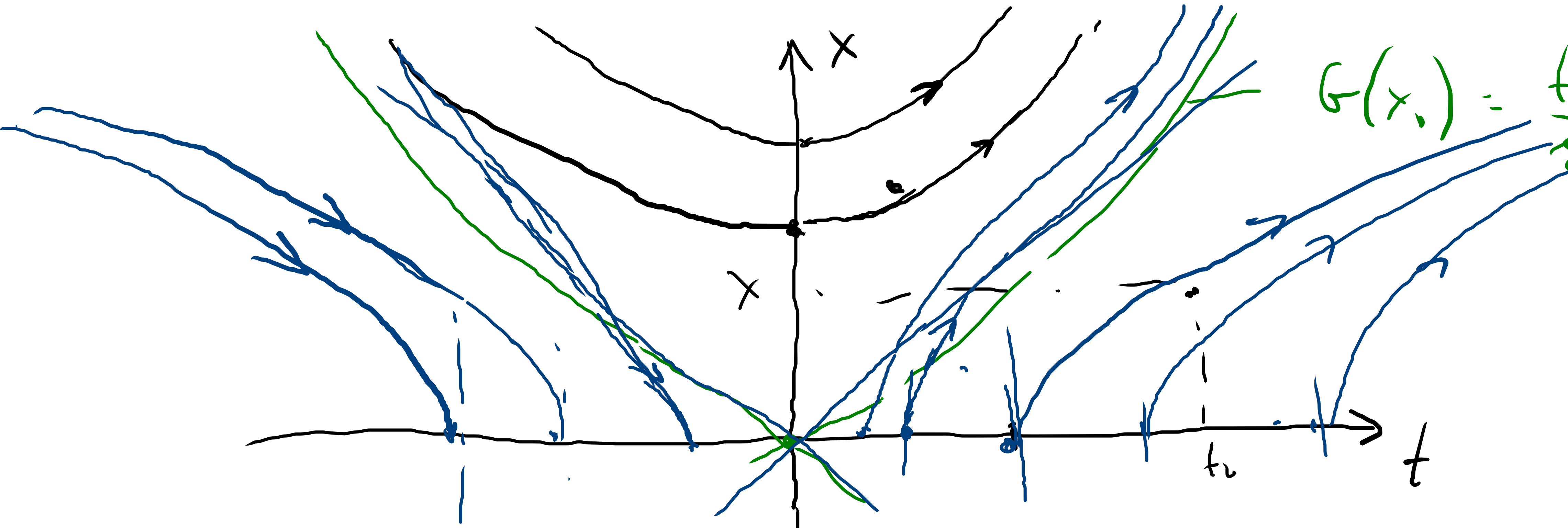
$\Rightarrow$ ур-е (1) разрешимо $\forall t \in \mathbb{R}$

(иначе говоря, решение задачи Коши $x(t)$ $\exists$ $\forall t \in \mathbb{R}$)

Случай 1.2. $-\frac{t_0^2}{2} + 6(x_0) < 0$

Решение $\exists$ при $\frac{t^2}{2} > \frac{t_0^2}{2} - 6(x_0)$, т.е.

либо $t > \sqrt{t_0^2 - 26(x_0)}$, либо $t < -\sqrt{t_0^2 - 26(x_0)}$



$G(x_0) = \frac{t_0^2}{2}$,

$x_0 \gg 1$, $G(x_0) \approx x_0$

$x(t)$ $\exists$ на $t \in (-\infty, -\bar t(t_0, x_0))$

$$\lim_{t \to -\bar t} x(t) = 0$$

$$\lim_{t \to -\bar t} \dot x(t) = -\infty$$

$t_0 > 0 \Rightarrow$

(x_0, t_0): $-\frac{t_0^2}{2} + G(x_0) < 0$

реш. $\exists$ на $[\bar t(t_0, x_0), +\infty)$

$$\bar t := \sqrt{t_0^2 - 2G(x_0)}$$

$$\lim_{t \to \bar t + 0} x(t) = 0.$$

$$\dot x(t) = \underbrace{t}_{\downarrow\, +\infty} \left(1 + \frac{1}{\underbrace{x(t)}_{\to 0}}\right)$$

Случай 2. $-1 < x_0 < 0 \iff -1 < x(t) < 0$

$$x - \ln(1+x) =: G(x) = F(t) := \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} + G(x_0) \qquad (1')$$

$$G((-1, 0)) = (0, +\infty)$$

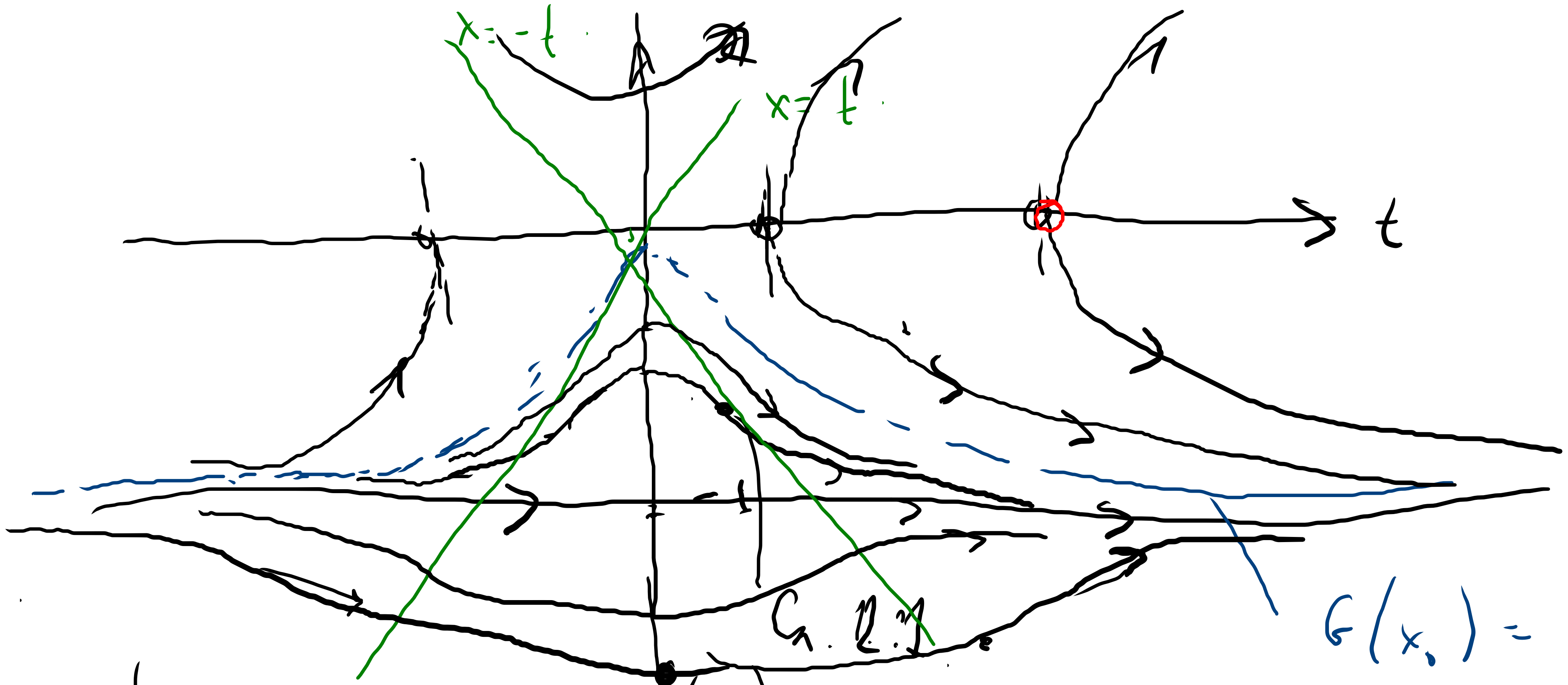
Случай 2.1. $G(x_0) - \frac{t_0^2}{2} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1')$ разрешимо $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) \ \exists \ \forall t \in \mathbb{R}.$

Случай 2.2. $G(x_0) - \frac{t_0^2}{2} < 0$ $\quad (1')$ разр. $\forall t \in [\bar{t}(t_0, x_0), +\infty) \cup (-\infty, -\bar{t}(t_0, x_0)]$

$$\bar{t}(t_0, x_0) := \sqrt{t_0^2 - 2G(x_0)}$$



Fall 3. $x_0 = -1$

$\Rightarrow x(t) = -1$.

$G(x_0) = t_0^2/2$

$t \to \pm\infty \Rightarrow F(t) \to +\infty$

$G(x) = F(t) \Rightarrow x(t) \to -1$

Fall 4. $x_0 < -1$.

$G(x) = F(t)$

$G(x) := x - \ln(-1-x)$

$G(-\infty, -1) = \mathbb{R}$

Ур-е $G(x) = F(t)$ разр. $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ реш. $X(t)$ $\exists$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Если $t \to \pm\infty$, то $F(t) \to +\infty$.

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad G(x) \Rightarrow x \to -1$.