Лекция 3

Задача Кеплера

В конце прошлой лекции мы определили понятие центральной силы для одинокой частицы в $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} f(|\vec{r}|).}$$

Здесь $\vec{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – радиус-вектор частицы, а f – произвольная гладкая функция.

Сила $\vec{F}$ направлена вдоль радиус-вектора частицы, то есть "к" или "от" начала координат. Она потенциальна. Ее потенциал – функция от одной переменной

$$\boxed{U(x) = -\int f(x)\,dx.}$$

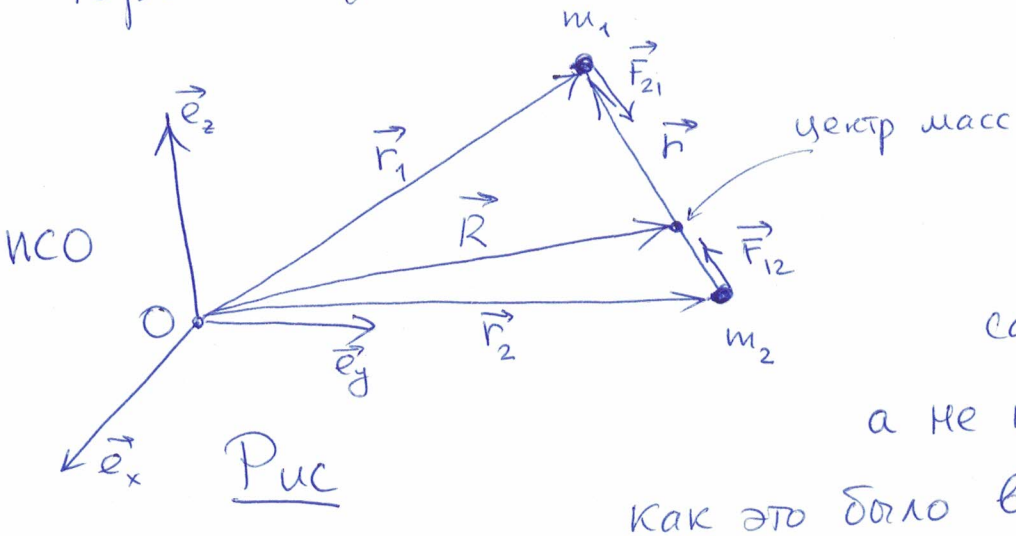
$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\partial U(|\vec{r}|)}{\partial \vec{r}} \equiv -\vec{\nabla} U(\vec{r}),$$ или в декартовых координатах:

$$\boxed{F_i(\vec{r}) = -\frac{\partial U(|\vec{r}|)}{\partial x_i}}$$

Здесь мы ввели (два) обозначения для оператора градиента. В декартовых координатах он имеет вид

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)}$$

На этой лекции мы будем обсуждать взаимодействие двух частиц в $\mathbb{R}^3$. Их радиус-векторы обозначим $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (см. Рис.)



Рис

Силы, действующие на частицы, будут порождаться самими частицами, а не происходить "извне", как это было в примере с одинокой частицей. Частица "1" воздействует на частицу "2", и наоборот.

Силы взаимодействия частиц называются центральными, если они потенциальны с потенциалом

$$U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

При этом

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_2} = -\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} U'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \text{ — сила,}$$

действующая на частицу "2" со стороны частицы "1".

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} = -\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} U'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \text{ — сила,}$$

действующая на частицу "1" со стороны частицы "2".

Как видим, центральные силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ направлены вдоль вектора $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, соединяющего две частицы, равны по величине и противоположны по направлению (как в 3-м законе Ньютона).

Одна функция потенциальной энергии U_{12} описывает взаимодействие 2-х частиц и порождает 2 силы. Эта ситуация характерна для фундаментальных взаимодействий: если в вашей системе N частиц с радиус-векторами $\vec{r}_i$, $i=1,\dots,n$, то все они взаимодействуют попарно. Каждая пара частиц "i" и "j" взаимодействует посредством потенциальных сил, задаваемых потенциалом

$$\boxed{U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}, \text{ то есть}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_j}, \quad \vec{F}_{ji} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_j}$$

сила со стороны частицы "i" на частицу "j"

сила со стороны частицы "j" на частицу "i"

В взаимодействие называется центральным, если

$$\boxed{U_{ij} = U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)},$$

при этом будет $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$.

Все силы взаимодействия в замкнутой системе N частиц (то есть, при отсутствии внешних сил) характеризуются одной функцией потенциальной энергии системы

$$\boxed{U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}$$

Из определения видно, что потенциальная энергия системы — величина аддитивная.

Сила, действующая на частицу "i":

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = -\left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial U_{ji}}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_i} \right) =$$

$$= \sum_{j \ne i} \vec{F}_{ji}$$ — это сумма сил, действующих на частицу "i" со стороны всех остальных частиц.

Вернемся к нашей задаче 2-х частиц, взаимодействующих посредством центральных сил — задаче Кеплера. Уравнения Ньютона для этой системы имеют вид (см. Рис. на стр. 2):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} & (1а) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} & (1в) \end{cases}$$

где $\vec{F} := \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -\dfrac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}}$ $(\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$= -\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} U'(|\vec{r}|)$.

Складывая уравнения из (1) мы можем избавиться от сил в правой части:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

Введя:
$$\begin{cases} \vec{R} := \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \text{ — радиус-вектор центра масс системы} \\ M := m_1 + m_2 \text{ — масса всей системы} \end{cases} \quad (3а)$$

Мы получаем первый закон сохранения в нашей системе частиц: закон сохранения полного импульса системы (ЗСИ):

$$\boxed{M\dot{\vec{R}} = \vec{P} = \overrightarrow{const}} \quad (3б)$$

Оставшиеся 3 степени свободы в системе 2-х частиц удобно описывать координатой $\vec{r}$

Линейно комбинируя уравнения (1): $\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_2 * (1а) - m_1 * (1б\right.$

получаем

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})}, \qquad (4)$$

где $\boxed{\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$ называется приведенной массой системы 2-х частиц

Уравнение (4) выглядит как уравнение Ньютона для частицы массы μ с радиус-вектором $\vec{r}$, находящейся под действием центральной силы $\vec{F}(\vec{r})$ (центр теперь расположен в начале координат). Это уравнение и будем дальше решать, но прежде обсудим еще кинетическую энергию системы частиц:

Как и потенциальная, кинетическая энергия — аддитивная величина, поэтому для системы 2-х частиц

$$\boxed{T_{кин.} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} = \frac{M \dot{\vec{R}}^{\,2}}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}} \qquad (5)$$

Последнее равенство легко проверить, оно интерпретируется так: кинетическая энергия 2-х частиц складывается из кинетической энергии их центра масс и кинетической энергии относительного движения частиц. Нормировка радиус-вектора центра масс $\vec{R}$ в (3а) /множитель $\frac{1}{m_1+m_2}$/ как раз выбрана так, чтобы обеспечить привычный вид кинетической энергии центра масс в (5)

Ещё одно замечание, прежде чем перейдем к анализу (4): исходные координаты $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ выражаются через новые $\vec{R}$ и $\vec{r}$ так:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_{01}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_{02}, \qquad (6a)$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{01} &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_{02} &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{aligned}}$$

← координаты частиц 1 и 2 в системе центра масс. (6в)

Поэтому, определив $\vec{r}$, мы тут же узнаем как ведут себя частицы в системе центра масс.

Займёмся (4): домножим обе его части векторно на $\vec{r}$. С учетом того, что $\vec{F} \parallel \vec{r}$ получаем

$$\mu[\vec{r}, \ddot{\vec{r}}] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mu[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]\right) = 0$$

Величина $\boxed{\vec{L} := \mu[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]}$ называется (7)

моментом импульса частицы μ, $\vec{r}$ относительно начала отсчета (в нашем случае относительно центра масс системы). Мы получили ещё один закон сохранения — закон сохранения момента импульса системы (ЗСМИ)

$$\boxed{\mu[\vec{r},\dot{\vec{r}}] = \vec{L} = \overrightarrow{const}} \qquad (8)$$

В случае, когда $\vec{L} \neq 0$, заключаем, что движение частицы μ, $\vec{r}(t)$ происходит в плоскости, ортогональной $\vec{L}$ ($\vec{r} \perp \vec{L}$ и $\dot{\vec{r}} \perp \vec{L}$)

Упр: Убедитесь, что в случае $\vec{L} = 0$ движение происходит по прямой, задаваемой вектором $\vec{r}(0) \parallel \dot{\vec{r}}(0)$.

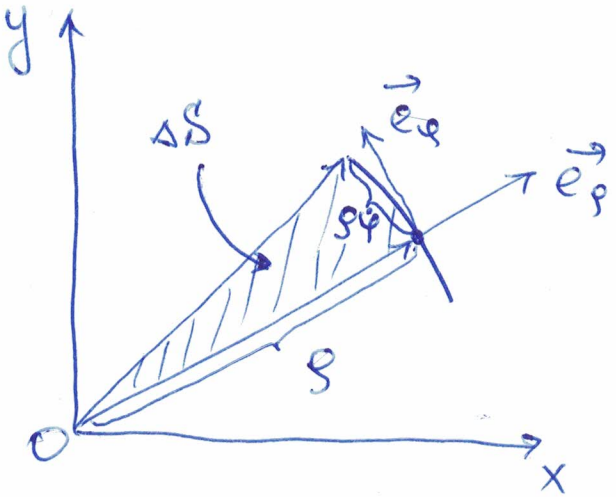
Сориентируем теперь орты нашей ИСО таким образом, чтобы $\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$. Движение происходит в плоскости $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, в которой мы перейдём к полярным координатам $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ /см. стр 8 лекции 1/

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L := |\vec{L}| = \mu\rho^2\dot{\varphi} = const} \qquad (8a)$$

Сохранение величины вектора $\vec{L}$ даёт связь между координатой ρ и угловой скоростью $\dot{\varphi}$.



Замечая, что $\Delta S = \frac{\rho^2\dot{\varphi}}{2}$ — это площадь сектора, заметаемого радиус-вектором $\vec{r}(t)$ в единицу времени, мы можем переформулировать (8a)

как

Второй закон Кеплера (1609г): секториальная скорость частицы в центральном поле постоянна:

$$\boxed{\frac{dS}{dt} := \frac{\rho^2\dot{\varphi}}{2} = \frac{L}{2\mu}} \qquad (8в)$$

Нам осталось написать для нашей системы последний закон сохранения – закон сохранения энергии (он всегда есть в системе с потенциальными силами).

Домножаем (4) скалярно на $\dot{\vec{r}}$, вспоминаем (2) и получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\mu\frac{\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}\right) = -\left(\vec{\nabla}U\cdot\dot{\vec{r}}\right) = -\frac{dU}{dt}$$

$$\Downarrow$$

ЗСЭ:

$$\boxed{\mu\frac{\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} + U(|\vec{r}|) = E = const} \qquad (9)$$

Заметим, что это закон сохранения энергии относительного движения частиц (записан в системе центра масс). В нём не содержится кинетическая энергия центра масс $\frac{M\dot{\vec{R}}^{\,2}}{2}$ (потенциальной энергии у центра масс нет), но эта энергия сохраняется отдельно в силу ЗСИ.

Воспользуемся ЗСМИ (8а) для того, чтобы записать ЗСЭ (9) в терминах исключительно ρ и $\dot{\rho}$:

С учетом $|\vec{r}| = \rho$, $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$, из (9) получаем

$$\text{ЗСЭ}: \quad \boxed{\frac{\mu\dot{\rho}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho) = E} \qquad (9a)$$

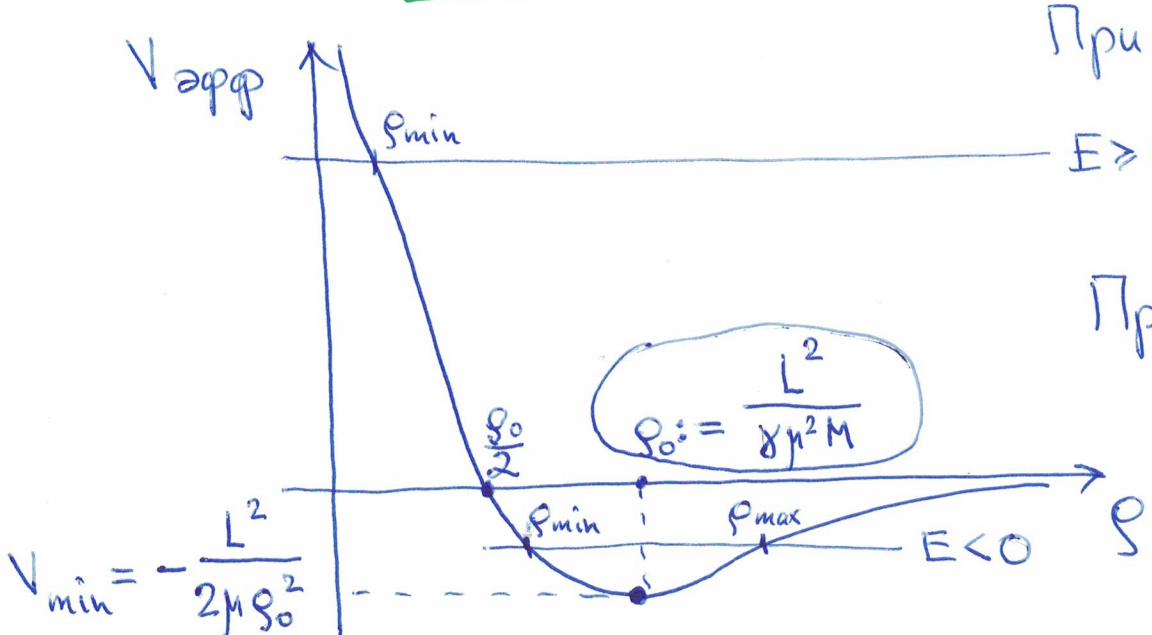
Это уже выглядит как закон сохранения энергии 1-мерной частицы μ, $\rho(t)$ в поле с эффективным потенциалом

$$\boxed{V_{эфф}(\rho) = \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho)} \qquad (10)$$

Зарисуем фазовый портрет такой системы при разных потенциалах $U(\rho)$

(а) Гравитационное взаимодействие

$$\boxed{U_{грав}(\rho) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{\rho} = -\frac{\gamma\mu M}{\rho}} \qquad (11)$$



При $E \geq 0$ движение системы неограничено

$\rho \in [\rho_{min}, +\infty)$

При $E < 0$ движение ограничено

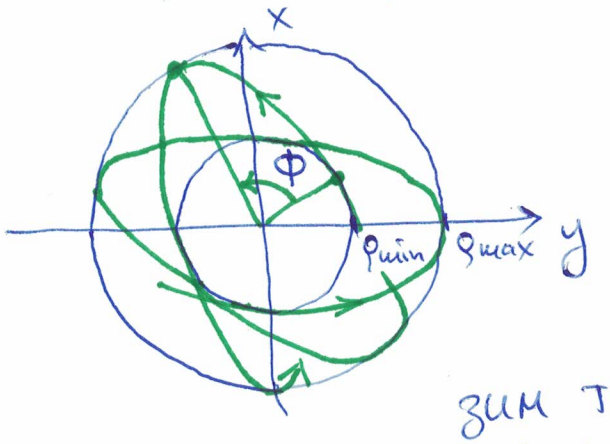
$\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$

Точка $\rho = \rho_0$ при $E = V_{min}$ является точкой покоя. Это не значит наша система находится в состоянии покоя. Покоится только $\rho = \rho_0$, а координата φ меняется по линейному закону

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu \rho_0^2} = \frac{\gamma^2 \mu^3 M^2}{L^3} \quad (\text{см. } (8a))$$

то есть мы имеем равномерное движение по кругу.

В остальных случаях ограниченного движения $V_{min} < E < 0$ система вращается внутри кругового кольца (см. рис.)



Естественный вопрос: когда получившаяся траектория будет замкнутой?

Для выяснения ответа выразим траекторию $\rho(t)$, $\varphi(t)$ как $\varphi(\rho)$: из $(9a)$ и $(8a)$ имеем

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_{эфф}(\rho)\right)}$$

на участке, когда ρ возрастает от ρ_{min} до ρ_{max}

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu \rho^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} = \frac{L}{\rho^2 \sqrt{2\mu\left(E - V_{эфф}(\rho)\right)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Phi = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{L\, d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\mu\left(E - V_{эфф}(\rho)\right)}}}$$

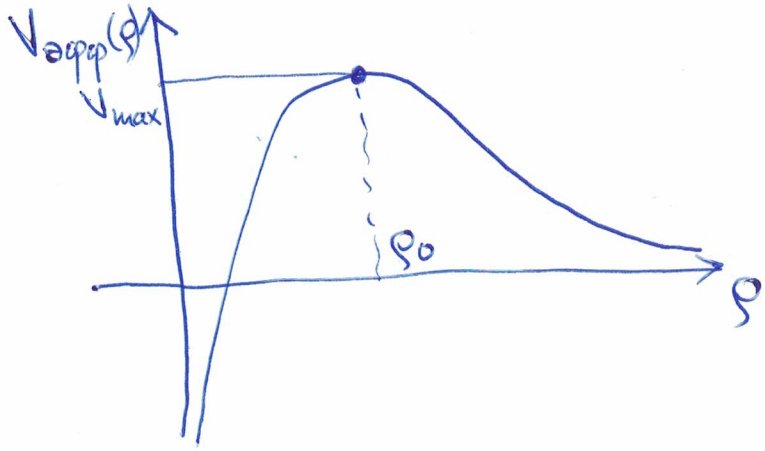
Здесь Φ – это угол, на который поворачивается радиус-вектор $\vec{r}(t)$ частицы при изменении $\rho = |\vec{r}|$ с ρ_{min} до ρ_{max} (см. рис.). Чтобы траектория частицы была замкнута, требуется

$$\boxed{\Phi = 2\pi q, \text{ где } q \in \mathbb{Q}}$$

Как доказывается в учебнике В. Арнольда (см. §8 Г.) <u>все</u> ограниченные орбиты замкнуты лишь для потенциалов $U(\rho) = -a/\rho$ и $U(\rho) = a\rho^2$, $a > 0$.

---

(8) Взаимодействие с потенциалом $U(\rho) = -\frac{1}{\rho^3}$



В таком потенциале все ограниченные орбиты движения

$$E \leq V_{max}$$

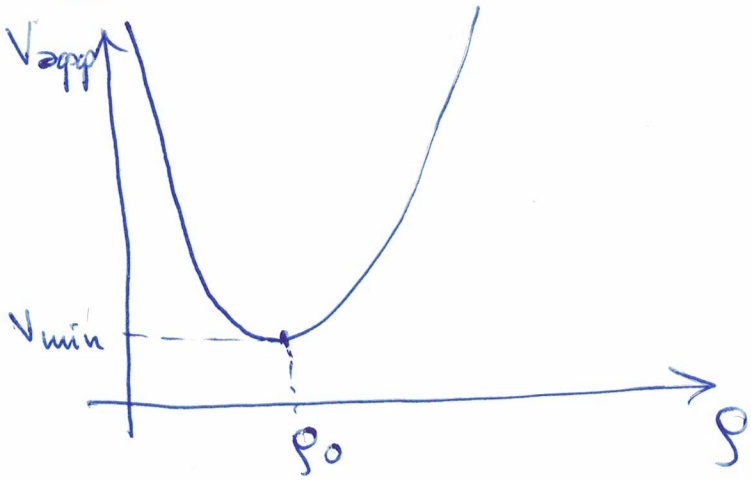
являются <u>падениями на центр</u>

$$\rho \in [0, \rho_{max}]$$

Имеется одна <u>неустойчивая</u> круговая орбита $\rho = \rho_0$, $E = V_{max}$. Неограниченные орбиты при $E > V_{max}$ тоже содержат падение: $\rho \in (0, +\infty)$. Единственные орбиты без падений: неограниченные при $0 < E \leq V_{max}$.

Это – <u>Катастрофический мир</u>.

(в) Взаимодействие с потенциалом $U(\rho) = \rho^2$



В таком мире есть одна устойчивая круговая орбита $\rho = \rho_0$, $E = V_{min}$.

Все остальные орбиты при $E > V_{min}$ ограничены.

Улететь насовсем от такого центра притяжения нельзя.

Так что нам повезло с гравитацией — это один из лучших возможных потенциалов.

Давайте, наконец, определим явный вид траекторий частиц для гравитационного потенциала.

Будем интегрировать закон сохранения энергии (9а) для потенциала (11):

$$\boxed{\frac{\mu \dot{\rho}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \gamma\frac{\mu M}{\rho} = E} \qquad (12а)$$

Вместо поиска $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ (см. (8а)) займемся поиском $\rho(\varphi)$, а ещё удобней

$$\boxed{u(\varphi) := \frac{1}{\rho(\varphi)}}$$

Вычислим производную

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\dot\rho}{\dot\varphi} \overset{(8a)}{=} -\frac{\dot\rho}{\cancel{\rho^2}}\cdot\frac{\mu\cancel{\rho^2}}{L} = -\frac{\mu}{L}\dot\rho$$

Поэтому (12а) переписывается в новых переменных

$$\boxed{\frac{L^2}{2\mu}\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] - \gamma\mu M\cdot u = E} \qquad (12в)$$

Здесь удобно вернуться назад от "закона сохранения" к "уравнению Ньютона", продифференцировав (12в) по φ. Получим:

$$\boxed{\frac{du}{d\varphi}\left\{\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right] - \gamma\mu M\right\} = 0}$$

Если $\frac{du}{d\varphi} \neq 0$ (т.е. орбита не круговая), то, сократив на $\frac{du}{d\varphi}$, мы получаем <u>линейный неоднородный дифур</u> 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Решение однородного дифура:

$$u(\varphi) = A\cos\varphi + B\sin\varphi \overset{\text{иная параметризация}}{=} C\cos(\varphi-\varphi_0).$$

Частное решение неоднородного дифура:

$$u_0(\varphi) = \frac{\gamma\mu^2 M}{L^2} = const$$ — это, кстати, и есть решение для круговой орбиты (см. рис. на стр 8)

Общее решение представим так:

$$\boxed{u(\varphi) = \frac{1}{\rho(\varphi)} = \frac{\gamma \mu^2 M}{L^2}\left(1 - \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)\right)} \quad (13)$$

Здесь ε и φ_0 — параметры решения, определяемые из начальных данных.

(13) — это общая формула конического сечения.

Подставив (13) в (12в) можно связать энергию относительного движения частиц E с параметром ε:

$$\boxed{E = \frac{\gamma^2 \mu^3 M^2}{2L^2}(\varepsilon^2 - 1) = |V_{min}|(\varepsilon^2 - 1)} \quad (14)$$

(см. рис. на стр. 8)

При $\varepsilon > 1$ уравнение (13) задает гиперболу, что соответствует движению с $E > 0$

При $\varepsilon = 1$ — параболу — соответствует $E = 0$

При $\varepsilon < 1$ — эллипс — соответствует $E < 0$

Всё это полностью согласуется с фазовым портретом системы на стр. 8.

В случае замкнутой орбиты: $0 \le \varepsilon < 1$,

вводя новое обозначение "a":

$$\boxed{\frac{1}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{\gamma \mu^2 M}{L^2} = \frac{1}{\rho_0}} \quad (15)$$

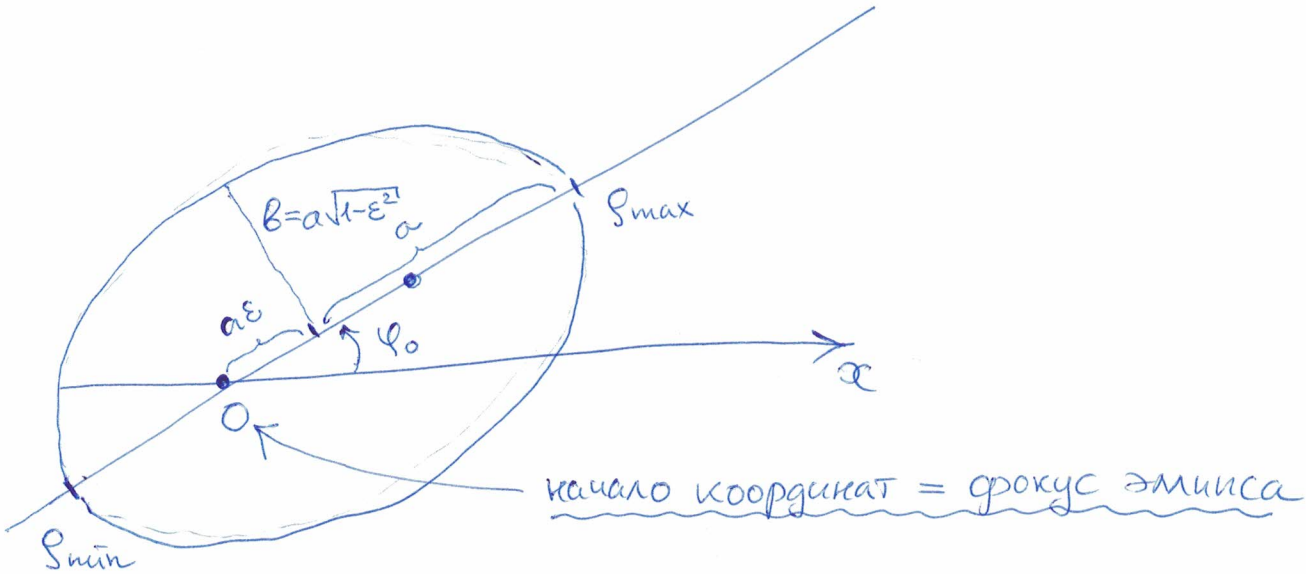
получаем следующие выражения для точек поворота (min и max значения ρ):

$$\rho_{min} = a(1-\varepsilon) \quad (\text{случается при } \varphi = \varphi_0 + \pi \text{ в } (13))$$

$$\rho_{max} = a(1+\varepsilon) \quad (\text{случается при } \varphi = \varphi_0 \text{ в } (13))$$

Поэтому "a" имеет смысл длины большой полуоси эллипса, "ε" – его эксцентриситет.

Картинка орбиты:



Пользуясь (14), (15) можно выразить энергию E через геометрическую характеристику эллипса a:

$$\boxed{E = -\frac{\gamma \mu M}{a}}$$

Первый закон Кеплера (1609).

Планеты солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце

До Кеплера считалось, что планеты движутся по окружностям.

Rem: Точнее, мы знаем, что по эллиптическим орбитам вокруг общего фокуса движется и Солнце и планета. Фокус находится в центре масс системы Солнце-планета.

$$\boxed{\vec{r}_{\text{Солнца}} = \frac{-m_{\text{планета}}}{m_{\text{солн.}} + m_{\text{план.}}}\vec{r}}, \quad \boxed{\vec{r}_{\text{планета}} = \frac{m_{\text{солн.}}}{m_{\text{солн.}} + m_{\text{план.}}}\vec{r}}$$

(см. (6в) на стр 5). Но, сравнивая массы солнца и планет:

$$\boxed{m_{\text{солн.}} \cong 10^3 m_{\text{юпитер}} \cong 3{,}3 \cdot 10^5 m_{\text{земля}}}$$

заключаем, что Солнце практически стоит в фокусе.

Кеплер не знал о характеристиках движения планет L и E, он вычислял периоды обращения планет τ

Из 2-го закона Кеплера следует:

$$\frac{dS}{dt} = \text{const} = \frac{L}{2\mu} = \frac{S_0}{\tau}$$

, где S_0 – площадь эллипса, заметаемого планетой за период обращения τ.

$$S_0 = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

, откуда вычисляем:

$$\tau^2 = \pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\frac{4\mu^2}{L^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \quad (\text{см. } (15))$$

Третий закон Кеплера (1619_2)

$$\boxed{\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = \text{const}}$$

(одна и та же константа для разных планет $M \cong m_{\text{солн}}$)