

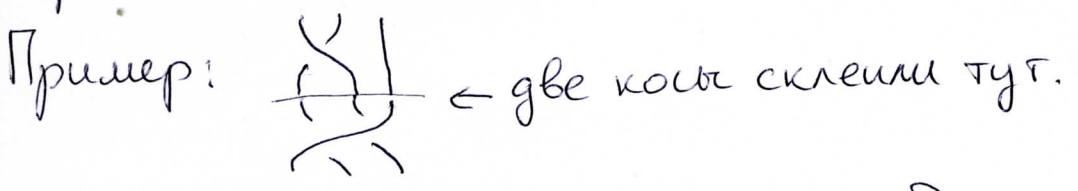
Группа кос

§ 1. Геометрическое представление

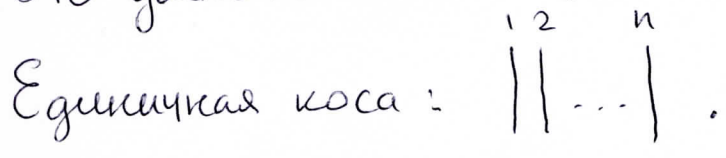
Интуитивно n -коса — это набор из n переплетённых между собой пронумерованных нитей. При этом нити не разрешается завязывать в узлы. Примеры:



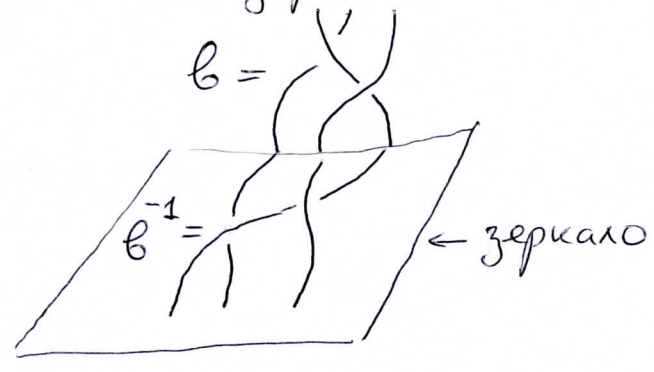
Умножение двух кос происходит путем "склеивания" верхних и нижних их нитей с одинаковыми номерами.



Это умножение ассоциативно и обратимо.



Обратная коса получается отражением исходной в лежащем горизонтально зеркале:

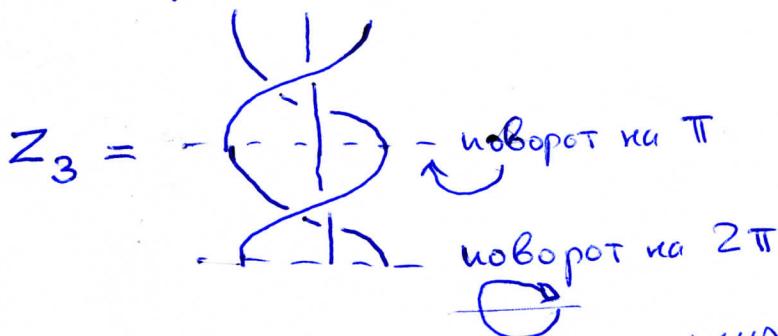


Итак, n -косы образуют группу. (2)

При $n=1$ группа тривиальна

При $n=2$ — это бесконечная циклическая группа.

При $n=3$ — это уже кеателева группа. Имеет нетривиальный центр, порождаемый элементом:



Центр группы 3-кос — бесконечная циклическая группа.

Фактор-группа группы 3-кос по ее центру изоморфна группе $PSL_2(\mathbb{Z})$ преобразований комплексной плоскости \mathbb{C} вида:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ и } ad-bc=1$$

В свою очередь $PSL_2(\mathbb{Z})$ — фактор-группа группы целочисленных 2×2 матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ по ее центру, порождаемому элементом $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$PSL_2(\mathbb{Z})$ — свободное произведение циклических групп C_2 и C_3 , порождаемых элементами

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (класс косы } \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \text{)}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (класс косы } \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \text{)}$$

$$c \text{ соотношениями на них } \boxed{a^3 = b^2 = 1}$$

(см. К. Касель, В. Тураев "Группы кос" МСНМО 2014, § 1.1.4, Филох А)

(3)

Дадим формально строгое определение группы кос:

Def 1 Конфигурационное пространство

$$\mathcal{P}_n := \{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \ \forall i \neq j \}$$

$$\mathcal{B}_n := \mathcal{P}_n / S_n$$

Здесь S_n — симметрическая группа, которая действует на наборах (z_1, z_2, \dots, z_n) перестановками компонент.

Иными словами \mathcal{P}_n — пространство упорядоченных наборов из n попарно различных точек на плоскости (комплексная структура нам не важна).

\mathcal{B}_n — пространство неупорядоченных таких наборов.

Def 2 Классическая группа кос (braid group) — это фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{B}_n)$

Группа крашенных кос (pure braid group) — это фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{P}_n)$.

Поскольку конфигурационное пространство m -нейно связно, фундаментальные группы одинаковы для всех точек этих многообразий

④

Нарисуем типичный элемент группы $\pi_1(P_n)$ для точки $(z_1, z_2, \dots, z_n) = (1, 2, \dots, n)$:

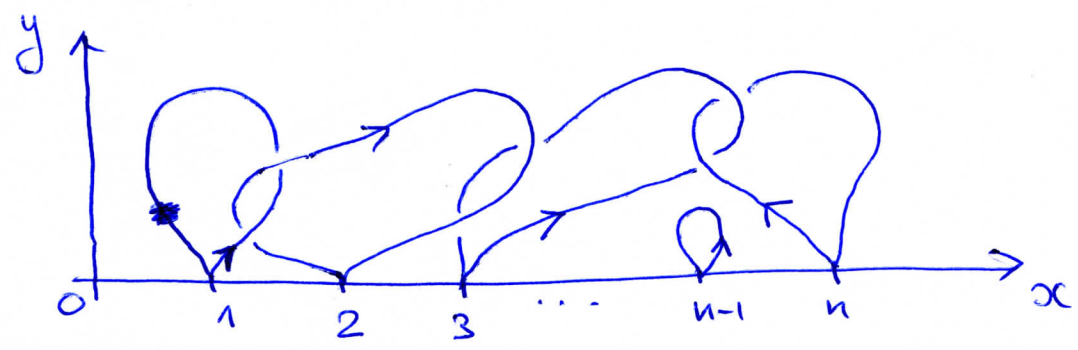


Рис. 1

Из каждой точки $i=1, 2, \dots, n$ стартует петля $z_i(t) : z_i(0) = z_i(1) = i$. Стрелка на петле указывает направление движения вдоль петли при увеличении t .

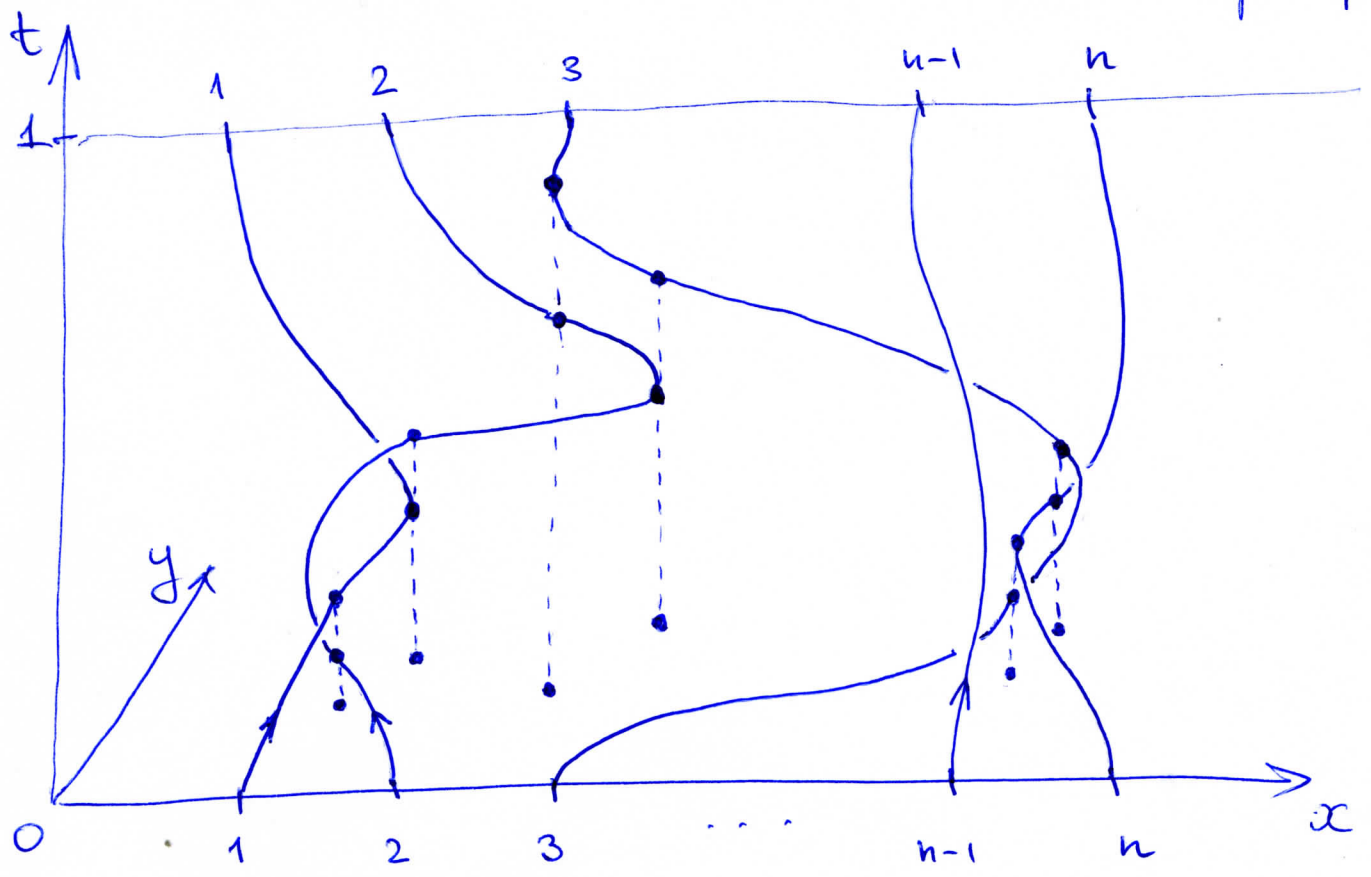
Условие $z_i(t) \neq z_j(t) \forall i \neq j$ порождает правило рисования пересечений петель: если

$z_i(t_1) = z_j(t_2) = z_0$, то рисуем , если $t_1 > t_2$

и , если $t_1 < t_2$. Более поздняя линия накрывает более раннюю, как если бы мы их рисовали палочками на песке.

При этом оказывается, что петли $z_1(t)$ и $z_2(t)$ на Рис. 1 никакими образом не могут расцепиться и стекнуться в точку, не нарушив правила $z_1(t) \neq z_2(t)$. Петли $z_2(t)$ и $z_3(t)$ на Рис. 1, расцепляются.

Для более наглядного представления картинки зацепления петель представим их в расширенном конфигурационном пространстве $\mathbb{C}^{x_n} \times [0, 1]$:
параметр t



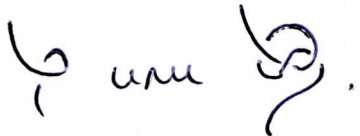

Получилась, так называемая, крашевая коса.

Все её нити начинаются и кончатся в точках с одинаковыми координатами

$$z_i(0) = z_i(1) = i \quad \forall i.$$

Можно считать, что каждая нить этой косы имеет свой особый цвет, и при утолщении таких кос склеиваются нити одного цвета.

Для элементов группы $\pi_1(B_n)$ помечаются похожие картинки в расширенном конфигурационном пространстве, с одним отличием: нити кос могут наливаться и заканчиваться в разных точках набора $(1, 2, \dots, n)$. Таким образом $\pi_1(B_n)$ — действительно группа классических n -кос.

Реш. Однозначность проекции петель $z_i(t)$ на ось времени t исключает возможность появления картинок вида  или .

Очевидно, группа крашенок кос $\pi_1(P_n)$ является подгруппой $\pi_1(B_n)$. Нетрудно убедиться, что эта подгруппа нормальна.

7. (7)
Действительно, каждой косе

$$b = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) \in \pi_1(B_n)$$

можно сопоставить элемент группы перестановок S_n :

$$b \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} z_1(0)=1, z_2(0)=2, \dots, z_n(0)=n \\ z_1(1), z_2(1), \dots, z_n(1) \end{pmatrix} \in S_n$$

На картинках это сопоставление означает, что мы "забываем" о том, какая нить сверху, а какая снизу при их пересечении:

$$b = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \mapsto \sigma = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

Это сопоставление — гомоморфизм: произведение кос сопоставляется композиции перестановок.

Подгруппа краевых кос является ядром этого гомоморфизма, и поэтому она нормальна.

Класс смежности косы $b \in \pi_1(B_n)$ по подгруппе краевых кос взаимнооднозначно соответствует перестановке:

$$[b]_{\pi_1(B_n)} = [(z_1(t), \dots, z_n(t))]_{\pi_1(B_n)} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ z_1(1) & z_2(1) & \dots & z_n(1) \end{pmatrix}$$

Таким образом S_n - фактор-группа

$\pi_1(B_n)$ по $\pi_1(P_n)$:

$$S_n = \pi_1(B_n) / \pi_1(P_n)$$

Формулу факторизации можно записать в виде короткой точкой последовательности групп

$$1 \rightarrow \pi_1(P_n) \xrightarrow{\quad} \pi_1(B_n) \xrightarrow{\beta_n^\Gamma} S_n \rightarrow 1$$

каноническое
вложение подгруппы
в группу

Отображение β_n^Γ :

$$v = (z_1(t), \dots, z_n(t)) \xrightarrow{\beta_n^\Gamma} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ z_1(1) & z_2(1) & \dots & z_n(1) \end{pmatrix}$$

Мы снабдим индексом Γ , имея в виду, что оно определено в геометрическом представлении группы кос.

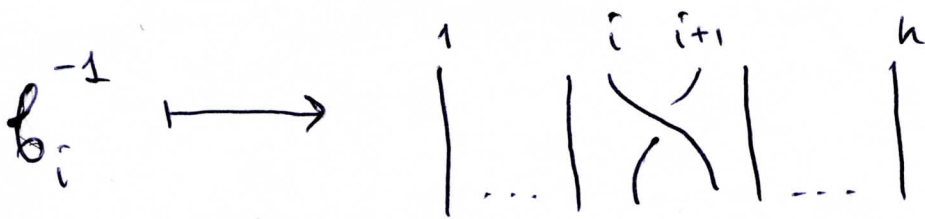
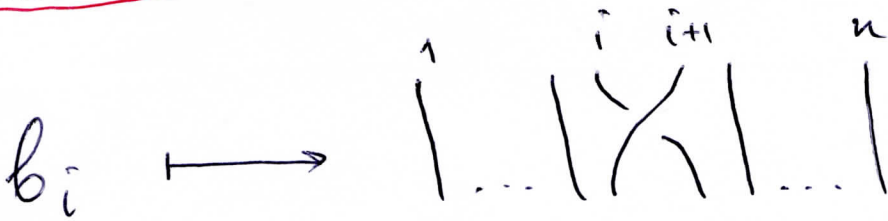
§2 Алгебраическое представление
(Emil Artin, 1925)

Рассмотрим набор букв $v_i, i=1 \dots n-1$.

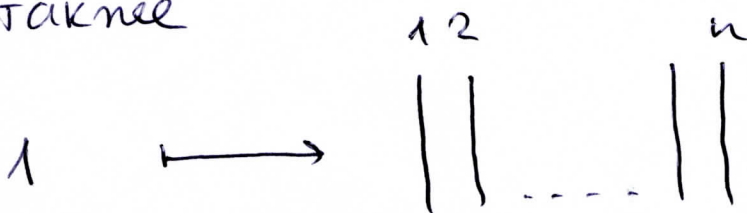
Будем считать, что этот набор букв порождает группу. То есть у каждой v_i есть обратная v_i^{-1} (вообще говоря, это новая буква), и есть единичная буква 1 :

$$v_i v_i^{-1} = v_i^{-1} v_i = 1. \quad (1)$$

Порождаемая группа содержит всевозможные слова, составленные из букв $v_i^{\pm 1}$. Пока это свободная группа. Нам не интересуют более специальная ситуация: мы сопоставили буквам картинки элементарных зацеплений из группы кос:



а также



Такое сопоставление уважает соотношения обратности (1):

$$\begin{array}{c} | \dots | \Sigma | \dots | \\ \hline | \dots | \Sigma | \dots | \end{array} = \begin{array}{c} | \dots | \Sigma | \dots | \\ \hline | \dots | \Sigma | \dots | \end{array} = \begin{array}{c} | \dots | | | | \dots | \\ \hline | \dots | | | | \dots | \end{array} \quad (1a)$$

Это сопоставление уважает и другие соотношения, которые мы можем представить к буквам v_i :

$$v_i v_j = v_j v_i \quad \forall i, j : |i-j| > 1 \quad (2)$$

$$v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, n-2. \quad (3)$$

Картанки, сопоставленные последним соотношением выглядят так:

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \quad (3a)$$

Def 3. Группа, порождаемая генераторами $v_i^{\pm 1}$, $i=1, \dots, n-1$, удовлетворяющими соотношениям (1), (2), (3) называется артиковой группой кос. B_n .

Комментарий к этапу определению

Задаче группы в терминах генераторов, т.е., набора букв: $\{v_1, v_2, \dots\}$, и соотношений,

т.е., набора слов составленных из этих букв:

$\{\omega_1 = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}, \omega_2, \dots\}$, означает, что мы

определим фактор-группу в свободной группе

$F(v_1, v_2, \dots)$, порождённой генераторами $\{v_1, v_2, \dots\}$

по нормальному замыканию набора элементов

$\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, то есть по нормальной подгруппе,

состоящей из всевозможных произведений элементов

вида $x_1 \omega_1 x_1^{-1}, x_2 \omega_2 x_2^{-1}, \dots, \forall x_{1,2,\dots} \in F$.

В определении Def 3 словами ω являются:

$$\omega_{ij} = v_i v_j v_i^{-1} v_j^{-1} \quad \forall i, j > 1$$

$$\sigma_i = v_i v_{i+1} v_i^{-1} v_{i+1}^{-1} v_i^{-1} v_{i+1}^{-1}$$

Замечание Факторизация по их нормальному замыканию приводит к тому, что в фактор-группе образам всех этих элементов будет единица:

$$\omega_{ij} = \sigma_i = 1.$$

Соотношения (3) называются соотношениями кос (braid relations). (10)

Рем. Картики преобразований эквивалентности кос (1a) и (3a), соответственно, называются движениями Рейдемейстера 2 и 3 типов. Вместе с движениями 1-го типа: $\sigma = \left| \right.$ они позволяют любой две узловые диаграммы, отвечающие одному и тому же узлу, привести к одинаковому виду.

Соответствие генераторам $v_i^{\pm 1}$ картинок элементарных зацеплений i -й и $(i+1)$ -й нитей косы порождает гомоморфизм группы, обозначим его \hat{i}_n :

$$\boxed{B_n \xrightarrow{\hat{i}_n} \pi_1(B_n)}$$

Наша конечная цель в этом разделе: доказать, что \hat{i}_n — изоморфизм группы.

А пока сделаем отступление о различных способах задания B_n в терминах генераторов и соотношений. Число используемых при этом генераторов зависит от выбора способа задания.

Реализация B_n №2 Определим

n -цикл

$$C_n := v_1 v_2 \dots v_{n-1} \xrightarrow{i_n} \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n \\ \diagdown \ \diagup \ \diagdown \ \diagup \ \dots \ \diagdown \ \diagup \end{array}$$

Нетрудно убедиться, что с помощью этого элемента из элементарного зацепления v_1 можно породить все остальные

$$v_2 = C_n v_1 C_n^{-1}, \dots, v_{i+1} = (C_n)^i v_1 (C_n)^{-i} \quad (4)$$

- Следовательно:
- а) все элементарные зацепления v_i в B_n взаимно сопряжены
 - б) B_n можно породить элементами $v_1^{\pm 1}$ и $C_n^{\pm 1}$.

Реализация B_n №3 (J. Birman, K.H. Ko, S.J. Lee 1998, Adv. Math. v.139, p.322-353)

Определим генераторы заплетения нитей i и j , $1 \leq j < i$

$$v_{ij} := (v_{j-1} v_{j-2} \dots v_{i+1}) v_i (v_{j-1} v_{j-2} \dots v_{i+1})^{-1} \quad (5)$$

Очевидно $v_{ii+1} = v_i$. Картичка для v_{ij} :



Можно убедиться, что B_n задаётся в терминах генераторов $v_{ij}^{\pm 1}$, $1 \leq i < j \leq n$, и соотношений

$v_{ij} v_{kl} = v_{kl} v_{ij}$, если (ij) и (kl) расположены на оси \mathbb{Z} как

$$v_{jk} v_{ij} = v_{ik} v_{jk} = v_{ij} v_{ik} \quad \forall i < j < k \quad (6)$$

картинка для этого элемента имеет вид:

Чтобы не вспоминать каждый раз, как упорядочены i, j и k , можно элемент v_{ij} представить графически:

$$v_{ij} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \text{---} \\ \hline j \\ \hline \end{array},$$

и тогда нетривиальные соотношения для v_{ij} можно нарисовать так:

$$\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \text{---} \\ \hline j \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \text{---} \\ \hline k \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \text{---} \\ \hline j \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \text{---} \\ \hline k \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \text{---} \\ \hline j \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \text{---} \\ \hline k \\ \hline \end{array} \quad (6a)$$

Реш: Заметим, что соотношения для генераторов $v_i (2, 3)$ лево-право симметричны (т.е. не меняют вида при прочтении справа-налево). Для генераторов v_{ij} это не так. Убедитесь, что формулы

$$v_{ij} v_{jk} = v_{jk} v_{ik} = v_{ik} v_{ij}, \quad i < j < k \quad \underline{\text{неверно}}$$

Почему это так?

Def 4: Нормальная подгруппа артиновой группы (13)

кос B_n , являющаяся нормальным замыканием набора $v_i^{\pm 2}$, то есть подгруппа $P_n \subset B_n$, порождаемая элементами вида

$$x v_i^{\pm 2} x^{-1} \quad \forall x \in B_n$$

называется артиновой группой крашенных кос

Реш: С учетом формул (4) подгруппу P_n можно породить из $v_1^{\pm 2}$.

Из определения (5) элементов v_{ij} следует, что

$$A_{ij} := v_{ij}^2 \in P_n \quad (7)$$

Лемма 1: Артинова группа крашенных кос P_n порождается набором $A_{ij}^{\pm 1}$, $1 \leq i < j \leq n$.

Док-во: Для $P_2 \subset B_2$ (абелев случай) всё очевидно

Первой нетривиальной случай $P_3 \subset B_3$: порождается

элементами $x v_1^2 x^{-1} = x A_{12} x^{-1}$, $x v_2^2 x^{-1} = x A_{23} x^{-1}$ и их

обратными. Здесь x - слово, составленное из генераторов

$$B_3: v_1^{\pm 1} \text{ и } v_2^{\pm 1}.$$

Возьмем результат сопряжения A_{12} и A_{23} генераторами $v_1^{\pm 1}$ и $v_2^{\pm 1}$: (14)

Тривиальные соотношения:

$$v_1^{\pm 1} A_{12} v_1^{\mp 1} = A_{12}$$

$$v_2^{\pm 1} A_{23} v_2^{\mp 1} = A_{23}$$

$$v_2 A_{12} v_2^{-1} = A_{13}$$

Чуть сложнее:

$$v_2^{-1} A_{12} v_2 = v_2^{-2} (v_2 A_{12} v_2^{-1}) v_2^2 = A_{23}^{-1} A_{13} A_{23}$$

Соотношения, требующие применения соотношения кос:

$$v_1^{-1} A_{23} v_1 = (v_1^{-1} v_2 v_1)^2 = (v_2 v_1 v_2^{-1})^2 = v_2 v_1^2 v_2^{-1} = A_{13}$$

$$v_1 A_{23} v_1^{-1} = (v_1 v_2 v_1^{-1})^2 = (v_2^{-1} v_1 v_2)^2 = v_2^{-1} v_1^2 v_2 = A_{23}^{-1} A_{13} A_{23}$$

(*) $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{также предобразует}}$

$$v_1^2 (v_1^{-1} A_{23} v_1) v_1^{-2} = A_{12} A_{13} A_{12}^{-1}$$

Видим, что в результате сопряжения A_{12} и A_{23} генераторами $v_{1,2}^{\pm 1}$ возникают, помимо $A_{12}^{\pm 1}$ и $A_{23}^{\pm 1}$ еще и A_{13} . Проверим, к чему приведет сопряжение A_{13} генераторами:

$$\boxed{A_{13} = v_2 v_1^2 v_2^{-1} = v_1^{-1} v_2^2 v_1}, \text{ поэтому}$$

$$v_1 A_{13} v_1^{-1} = A_{23}, \quad v_1^{-1} A_{13} v_1 = A_{12}^{-1} A_{23} A_{12}$$

$$v_2^{-1} A_{13} v_2 = A_{12}, \quad v_2 A_{13} v_2^{-1} = A_{23} A_{12} A_{23}^{-1}$$

Убедимся, что при сопряжении A_{13} новых элементов, помимо $A_{12}^{\pm 1}$, $A_{23}^{\pm 1}$ и A_{13} , не возникло. Заключаем, что все элементы P_3 можно выразить как комбинацию из $A_{12}^{\pm 1}$, $A_{23}^{\pm 1}$, A_{13} .

В случае P_n , $n > 3$, следует провести аналогичную проверку.

Предлагается проверить самостоятельно формулы:

(15)

$$\begin{aligned}
 & v_1 A_{2k} v_1^{-1} = A_{2k}^{-1} A_{1k} A_{2k}, \\
 & \begin{cases} v_1^{-1} A_{2k} v_1 = A_{1k} \Leftrightarrow v_1 A_{1k} v_1^{-1} = A_{2k}, \\ v_1^{-1} A_{2k} v_1 = A_{12}^{-1} A_{2k} A_{12} \end{cases} \\
 & \begin{cases} v_k A_{1k} v_k^{-1} = A_{1k+1} \Leftrightarrow v_k^{-1} A_{1k+1} v_k = A_{1k} \\ v_k^{-1} A_{1k} v_k = A_{kk+1}^{-1} A_{1k+1} A_{kk+1} \\ v_k A_{1k+1} v_k^{-1} = A_{kk+1} A_{1k} A_{kk+1}^{-1} \end{cases} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Сопрежнему A_{ij} группами $v_k^{\pm 1}$ очевидно. ▣

Уже из соотношений (*) на стр 14. видно, что не свободно порождаются элементами $A_{ij}^{\pm 1}$. В следующей лемме вводится соотношение для A_{ij} . Впоследствии выяснится, что эти соотношения задают группу краешков кос P_n .

Для наглядности условимся вместо произвольного набора упорядоченных индексов i, j, k, l :

$$1 \leq i < j < k < l \leq n$$

использовать символы: $[i, j, k, l \rightarrow 1, 2, 3, 4]$

Лемма 2 Генераторы A_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, артиновой группы краешков кос P_n удовлетворяют соотношениям:

$$\| A_{12} A_{34} = A_{34} A_{12}, \quad A_{14} A_{23} = A_{23} A_{14},$$

циклическое соотношение:

(16)

$$A_{12} A_{13} A_{23} = A_{13} A_{23} A_{12} = A_{23} A_{12} A_{13} \quad (a)$$

$$A_{13} (A_{14} A_{24} A_{34}) = (A_{14} A_{24} A_{34}) A_{13} \quad (b) \quad (g)$$

Соотношения (9a, б) позволяют выписать сокращенный:

$$A_{12} A_{23} A_{12}^{-1} = (A_{13} A_{23})^{-1} A_{23} (A_{13} A_{23}) \quad (2)$$

$$A_{12}^{-1} A_{23} A_{12} = A_{13} A_{23} A_{13}^{-1} \quad (\beta)$$

$$A_{12} A_{13} A_{12}^{-1} = A_{23}^{-1} A_{13} A_{23} \quad (\gamma) \quad (g)$$

$$A_{12}^{-1} A_{13} A_{12} = (A_{13} A_{23}) A_{13} (A_{13} A_{23})^{-1} \quad (\delta)$$

$$A_{13} A_{24} A_{13}^{-1} = (A_{34}^{-1} A_{14}^{-1} A_{34} A_{14}) A_{24} (A_{34}^{-1} A_{14}^{-1} A_{34} A_{14})^{-1} \quad (\tau)$$

$$A_{13}^{-1} A_{24} A_{13} = (A_{14} A_{34} A_{14}^{-1} A_{34}^{-1}) A_{24} (A_{14} A_{34} A_{14}^{-1} A_{34}^{-1})^{-1} \quad (\sigma)$$

Доказательство:

Заметим, что второе равенство в (9a) уже доказано вложением (*) на стр 14.

Для доказательства первого равенства (9a) применим графическое обозначение для b_{ij} со стр. 12 и формулу (6a). В этих обозначениях

$$A_{ij} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \hline j \\ \hline \end{array}$$

Имея артикову группу $\text{cos } B_n$ и её нормальную подгруппу P_n мы можем построить ещё одну короткую точную последовательность:

$$1 \longrightarrow P_n \longrightarrow B_n \xrightarrow{\beta_n^{\text{АЛГ.}}} S_n \longrightarrow 1$$

Вложение подгруппы
в группу

Здесь $\beta_n^{\text{АЛГ.}}$ — каноническая суръекция $B_n \xrightarrow{\beta_n^{\text{АЛГ.}}} B_n/P_n = S_n$:

$$v_i \xrightarrow{\beta_n^{\text{АЛГ.}}} \sigma_i$$

Т.к. v_i порождают B_n , то σ_i порождают S_n , причем они удовлетворяют соотношениям:

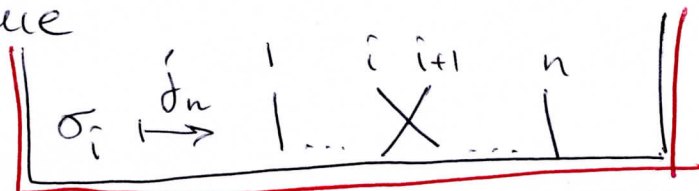
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i^2 = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{следуют} \\ \text{из } B_n \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{результат} \\ \text{факторизации} \end{array} \right\} \end{array} \quad (10)$$

Def 5: Соотношения (10) задают артиково представление симметрической группы S_n с использованием генераторов элементарных транспозиций σ_i , $i=1, \dots, n-1$.

Rem: Ещё одно общепотребительное обозначение

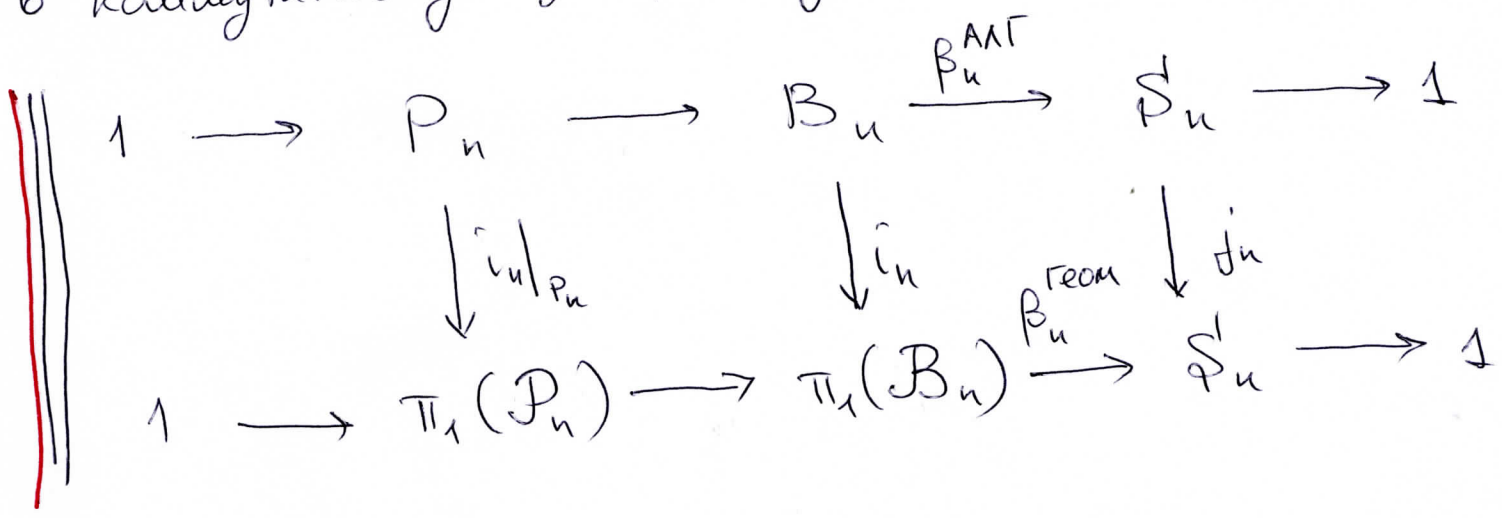
для σ_i — $(i, i+1)$.

Отображение



устанавливает, на самом деле, изоморфизм алгебраического и геометрического представлений симметрической группы. Проверив выполнение соотношений (10) для картинок, нетрудно убедиться, что это гомоморфизм группы. Всякой картинке перестановки можно сопоставить композицию элементарных транспозиций σ_i (например, разложив ее на циклы и представив циклы в виде произведений транспозиций). Так что j_n — это сюръекция. Заметив, что n -перестановок всего $n!$, и убедившись, что из σ_i можно построить не более $n!$ различных слов (убедитесь сами), заключаем, что j_n — инъекция. Следовательно j_n — изоморфизм.

Отображения i_n и j_n определяют две построенные нами короткие точные последовательности в коммутативную диаграмму:



Отсюда, воспользовавшись известной леммой (20)

о 5 гомотопиях заключаем, что изоморфизм отображения i_n следует из изоморфизма его ограничения $i_n|_{P_n}$.

Последнее утверждение мы будем доказывать индукцией по n .

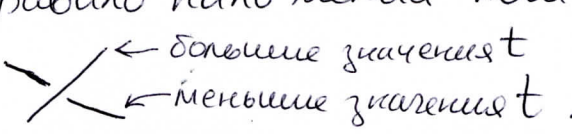
Рассмотрим отображение

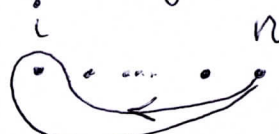
$$\pi_1(P_n) \xrightarrow{\sum_n^{\text{геом.}}} \pi_1(P_{n-1})$$

заключающееся в удалении последней справа (n -ой) нити краешкой кочы. Оно является гомоморфизмом групп. Ядро этого гомоморфизма состоит из n -коч, у которых левые ($n-1$) нити не перемешаны между собой, а n -ая нить произвольным образом заплетается между ними. На картинку такой краешкой n -кочы удобно взглянуть сверху:



То, что мы видим — это картинка элемента фундаментальной группы плоскости \mathbb{R}^2 с $n-1$ точками. $1, 2, \dots, n-1$

Заметим, что стрелка на рисунке петли $z_n(t)$ (21) показывает направление обхода петли от $t=0$ до $t=1$, и это однозначно задаёт правило знаков компонент петли при пересечении:  ← большие значения t
← меньшие значения t .

Известно, что $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \dots, n-1\})$ — свободная группа с $(n-1)$ образующими вида: 

Построим алгебраический аналог отображения $\Sigma_n^{\text{геом.}}$.

Строить его будем даже не на P_n , а на группе \tilde{P}_n формально порождаемой генераторами $\tilde{A}_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$, удовлетворяющими соотношениям (9). Очевидно

$\tilde{P}_n \rightarrow P_n : \tilde{A}_{ij} \mapsto A_{ij}$ — это гомоморфизм, но мы пока не уверены, что это гомоморфизм, т.е., что на A_{ij} нет ещё соотношений независимых от (9).

Определим:

$$\tilde{P}_n \xrightarrow{\Sigma_n^{\text{АЛГ.}}} \tilde{P}_{n-1} : \begin{array}{l} \tilde{A}_{ij} \xrightarrow{\Sigma_n^{\text{АЛГ.}}} \tilde{A}_{ij}, \text{ если } j < n \\ \tilde{A}_{in} \xrightarrow{\Sigma_n^{\text{АЛГ.}}} 1 \end{array}$$

Нетрудно убедиться, что $\Sigma_n^{\text{АЛГ.}}$ согласовано с соотношениями (9), то есть $\Sigma_n^{\text{АЛГ.}}$ — гомоморфизм.

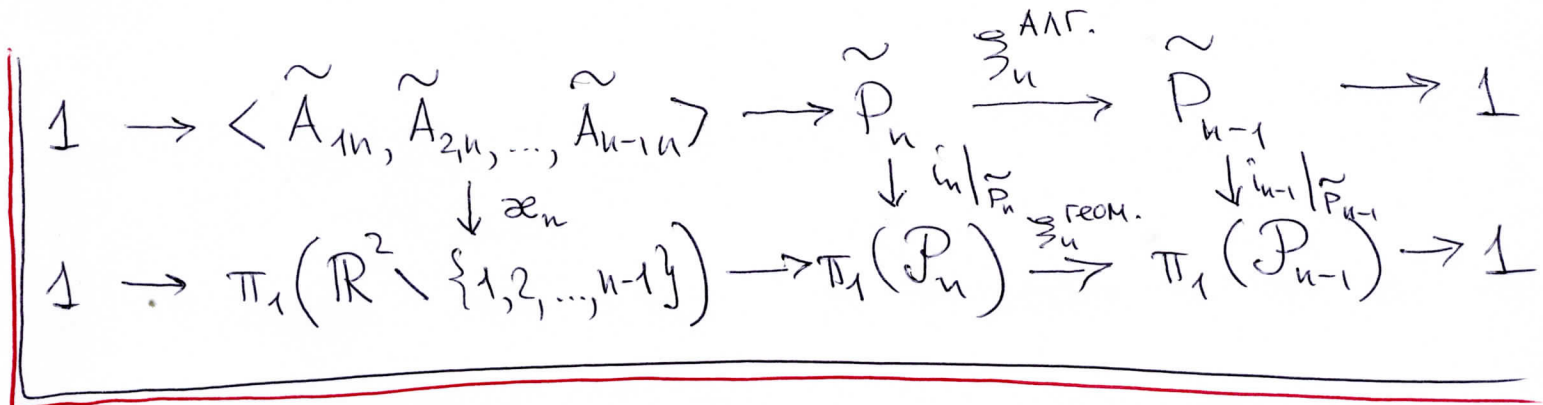
Ядро $\Sigma_n^{\text{АЛГ.}}$ — нормальное замыкание набора элементов $\{\tilde{A}_{1n}, \tilde{A}_{2n}, \dots, \tilde{A}_{n-1n}\}$ в \tilde{P}_n , то есть

Нормальная подгруппа, порожденная элементами

вида $x \tilde{A}_{in}^{\pm 1} x^{-1}$, где x - слово из $\tilde{A}_{jk}^{\pm 1}$.

Но из соотношений (9.2-5) следует, что всякий такой элемент представим в виде слова, составленного из элементов $\tilde{A}_{*n}^{\pm 1}$, то есть ядро Σ_n^{ALG} порождается элементами $\tilde{A}_{in}^{\pm 1}, i=1, \dots, n-1$.

Итак, с помощью отображений $\Sigma_n^{геом}$ и Σ_n^{ALG} мы получили еще "пару коротких точек последовательности":




причем их можно организовать в коммутативную диаграмму, как нарисовано выше.

Здесь $\hat{i}_n / \tilde{P}_n : \tilde{P}_n \rightarrow P_n \xrightarrow{\hat{i}_n / P_n} \pi_1(P_n)$

$\alpha_n : \tilde{A}_{in} \mapsto \overset{1}{\cdot} \dots \overset{i}{\cdot} \dots \overset{n}{\cdot}$

α_n - гомоморфизм, поскольку он является ограничением гомоморфизма \hat{i}_n / \tilde{P}_n с \tilde{P}_n на подгруппу $\langle \tilde{A}_{1n}, \dots, \tilde{A}_{n-1n} \rangle$. α_n - сюръективен, поскольку в его образе лежат все

генераторов  группы $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, \dots, n-1\})$. (23)

Ядро \mathcal{X}_n тривиально, иначе $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, \dots, n-1\})$ не была бы свободной группой. Значит \mathcal{X}_n — изоморфизм, а подгруппа $\langle \tilde{A}_{1n}, \dots, \tilde{A}_{n-1n} \rangle$ свободна и совпадает с $\langle A_{1n}, \dots, A_{n-1n} \rangle$.

Теперь то, что $i_n|_{\tilde{P}_n}$ — изоморфизм следует индукцией по n с использованием леммы о 5-элементарных морфизмах для коммутативной диаграммы со стр. 22.

База индукции: $i_1|_{\tilde{P}_1} = \text{id}$, т.к. $\pi_1(\mathcal{P}_1) = \tilde{P}_1 = 1$.

Отсюда, и из того факта, что $\tilde{P}_n \rightarrow P_n$ — сюръекция, следует уже, что $i_n|_{\tilde{P}_n}$ — изоморфизм, и $\tilde{P}_n = P_n$.

Подведем итог:

Теорема: Классическая и крашеная группы кос имеют артиновы представления:

$$\pi_1(\mathcal{B}_n) \cong B_n, \quad \pi_1(\mathcal{P}_n) \cong \tilde{P}_n = P_n$$