Семинар 1.

Этом домашнее задание состоит из задач, связанных с конструкцией Штейнера невырожденной квадрики в $\mathbb{P}^3$. Для формулировки задач напомним необходимые обозначения, которые были введены на семинаре.

В пространстве $\mathbb{P}^3$ фиксированы две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 и рассматриваются пучки плоскостей l_1 и l_2, проходящих через эти прямые. Как мы знаем из обсуждения на семинаре, плоскости этих пучков соответствуют точкам прямых $\check{l}_1$ и $\check{l}_2$ в двойственном проективном пространстве $\check{\mathbb{P}}^3$. Зафиксируем проективное отображение $f : \check{l}_1 \xrightarrow{\sim} \check{l}_2$. Невырожденная квадрика по Штейнеру Q определяется как множество точек в $\mathbb{P}^3$, образуемое прямыми $\pi \cap f(\pi)$ пересечения пар соответственных плоскостей $\pi \in \check{l}_1$ и $f(\pi) \in \check{l}_2$ в пучках, то есть $Q = \bigcup\limits_{\pi \in \check{l}_1} (\pi \cap f(\pi))$.

Мы установили на семинаре, что эта конструкция квадрики Q равносильна следующей. Рассмотрим проективные отображения между прямыми $g_1 : \check{l}_1 \xrightarrow{\sim} l_2,\ \pi \mapsto \pi \cap l_2$ и $g_2 : \check{l}_2 \xrightarrow{\sim} l_1,\ \rho \mapsto \rho \cap l_1$, и композицию $\tilde{f} = g_2 \circ f \circ g_1^{-1} : l_2 \xrightarrow{\sim} l_1$. Тогда квадрика Q получается как множество прямых $l(x) := \langle x, \tilde{f}(x) \rangle$, соединяющих точки x прямой l_2 с точками $\tilde{f}(x)$ прямой l_1: $Q = \bigcup\limits_{x \in l_2} l(x)$.

Задача 1. 1) Докажите, что для любых двух различных точек $x, x' \in l_2$ прямые $l(x)$ и $l(x')$ не пересекаются.
2) Зафиксируем три различные точки $x_0,\ x_1,\ x_2$ на прямой l_2. На прямой $l(x_0)$ возьмем произвольную точку y_0, отличную от x_0 и $\tilde{f}(x_0)$. Докажите, что через точку x_0 проходит единственная прямая, обозначаемая через m_{y_0}, пересекающая прямые $l(x_1)$ и $l(x_2)$.

Задача 2. В обозначениях задачи 1 докажите, что прямая m_{y_0} пересекает прямую $l(x)$ для любой точки $x \in l_2$.

Задача 3. В предыдущих обозначениях докажите, что m_{y_0} лежит на Q для любой точки $y_0 \in l_2$.

Задача 4. Докажите, что $Q = \bigcup\limits_{y_0 \in l(x_0)} m_{y_0}$.

Задача 5. Докажите, что если прямая l в $\mathbb{P}^3$ имеет с квадрикой Q по крайней мере три различные общие точки, то она лежит на Q. Выведите отсюда, что степень квадрики Q равна 2. (Под степенью квадрики Q понимается степень неприводимого однородного многочлена F от проективных координат x_0, x_1, x_2, x_3 в $\mathbb{P}^3$, где Q задается уравнением $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$.)

Задача 6. Напишите уравнение квадрики Q в $\mathbb{P}^3$.