Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 2. Плоские алгебраические кривые: комплексная проективная плоскость

Плоская кривая — это кривая на плоскости. Обычно мы представляем себе вещественную кривую, нарисованную на вещественной плоскости. В этом курсе нас будут интересовать, однако, комплексные кривые на комплексной плоскости. Имея дело с алгебраическими кривыми, естественно рассматривать — как в комплексном, так и в вещественном случае, — кривые на проективной, а не в аффинной, плоскости.

Комплексная проективная плоскость $\mathbb{C}P^2$ определяется как множество троек комплексных чисел, не все из которых равны нулю, рассматриваемых с точностью до умножения на общее ненулевой комплексное число, $\mathbb{C}P^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$.
Мы будем использовать *однородные координаты* $(x : y : z)$ для точек в комплексной проективной плоскости и записывать уравнения кривых в этих координатах. Условие $x \neq 0$ (так же, как и условия $y \neq 0$, $z \neq 0$) определяет открытое подмножество в проективной плоскости, изоморфное аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$. Иногда мы будем записывать уравнения кривых в аффинных координатах (y, z) (соответственно, (x, z), (x, y)), полагая $x = 1$ (соответственно, $y = 1$, $z = 1$).

Тройка комплексных чисел a, b, c, не все из которых равны 0, определяет в $\mathbb{C}P^2$ прямую $ax + by + cz$.

Еще одним примером плоской кривой является квадрика $x^2 + y^2 + z^2$.

Более общим образом, *плоской алгебраической кривой степени d* называется однородный многочлен степени d

$$F(x, y, z) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=d}} a_{i,j,k} x^i y^j z^k,$$

в котором не все коэффициенты $a_{i,j,k}$ равны 0. Каждой плоской алгебраической кривой соответствует множество ее точек $\{(x : y : z) | F(x, y, z) = 0\}$.

Задача. Докажите, что множество точек всякой плоской алгебраической кривой непусто.

Обе кривые на предыдущем слайде являются гладкими. Точка кривой $F(x,y,z)=0$ называется *гладкой*, если не все частные производные $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z$ обращаются в этой точке в 0. Кривая называется *гладкой*, если все ее точки гладкие. Точки кривой, не являющиеся гладкими, называются *особыми*; кривая, на которой есть особые точки, называется *особой*.

Для прямой $F(x,y,z)=ax+by+cz=0$ частные производные функции F не зависят от выбранной точки кривой и равны a,b,c; поскольку не все числа a,b,c равны 0, все точки кривой гладкие.

Для квадрики $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=0$ частные производные функции F равны $2x,2y,2z$; все они равны 0 только если $x=y=z=0$. Такой точки нет на проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, а значит и на кривой $F=0$.

Согласно теореме о неявной функции, в окрестности своей гладкой точки всякая плоская кривая C допускает параметризацию $\varphi^{-1} : D \to \mathbb{C}P^2$ голоморфным отображением единичного диска, дифференциал которого не обращается в 0. Поэтому гладкая плоская кривая покрывается картами, функции перехода которых имеют положительный определитель, а значит, является ориентируемым вещественным двумерным многообразием.

Квадрика $F(x, y, z) = x^2 + y^2 = 0$ не является гладкой. Она содержит особую точку
Пример особой кривой степени n:

$$F(x, y, z) = \ell_1\ell_2 \dots \ell_n = 0,$$

где $\ell_1, \dots, \ell_n$ — ненулевые линейные многочлены.

Плоская алгебраическая кривая степени d называется *приводимой*, если однородный многочлен $F = F(x, y, z)$, задающий ее, раскладывается в произведение двух однородных многочленов, степень каждого из которых меньше d, $F = HG$. Если такого разложения не существует, то кривая $F = 0$ называется *неприводимой*.
Если плоская кривая $F = 0$ приводима, $F = GH$, то она является объединением кривых $G = 0$ и $H = 0$. Всякая плоская кривая $F = 0$ представляет собой объединение конечного числа неприводимых кривых. Это представление единственно.
Задача. Докажите, что всякая точка пересечения плоских кривых $G = 0$ и $H = 0$ является особой точкой кривой $GH = 0$.
Задача. Приведите пример плоской алгебраической кривой, множество гладких точек которой пусто.

Пусть $(x_0 : y_0 : z_0)$ — точка пересечения двух плоских алгебраических кривых $G = 0$ и $H = 0$. Эта точка называется *точкой трансверсального пересечения кривых*, если дифференциалы dG и dH линейно независимы (т.е. непропорциональны друг другу) в этой точке. В частности, эта точка должна быть гладкой для обеих кривых.
Точка трансверсального пересечения сохраняется при малом возмущении многочленов G и F.

Лекция 2. Плоские алгебраические кривые: трансверсальное самопересечение

Пусть $(x_0 : y_0 : z_0)$ — особая точка плоской алгебраической кривой $F = 0$. Выберем систему аффинных координат (X, Y) с центром в этой точке. В этой системе координат уравнение кривой имеет вид

$$aX^2 + bXY + cY^2 + \tilde{f}(X, Y) = 0,$$

где многочлен $\tilde{f}$ содержит мономы степени 3 и выше. Точка $(x_0 : y_0 : z_0)$ называется *точкой трансверсального самопересечения* кривой $F = 0$, если квадратичная часть $aX^2 + bXY + cY^2$ аффинного уравнения кривой невырождена.
В окрестности точки трансверсального самопересечения кривая имеет два гладких *листа*, касательные к которым задаются прямыми, определяемыми разложением

$$aX^2 + bXY + cY^2 = (a_1X + b_1Y)(a_2X + b_2Y) = 0.$$

Точка трансверсального самопересечения сохраняется при малом возмущении многочлена F.
Задача. Приведите пример неприводимой кривой с точкой трансверсального самопересечения.

Многие свойства плоских алгебраических кривых можно предсказать, а иногда и доказать, рассматривая особые кривые, являющиеся объединениями различных прямых, задаваемых линейными уравнениями.
Например, общий набор прямых $\ell_1 \dots \ell_k = 0$ пересекается с общим набором прямых $\ell_{k+1} \dots \ell_{k+m} = 0$ трансверсально в $k \cdot m$ точках. Первая из этих кривых является плоской алгебраической кривой степени k, вторая — степени m.

Theorem (Bezout)

Гладкая алгебраическая кривая степени k пересекает общую алгебраическую кривую степени m трансверсально в mk точках.

Что означают слова 'общая' в формулировке теоремы?
Пусть $F = 0$ — данная плоская кривая степени k. Множество всех плоских кривых степени m представляет собой проективное пространство.
Задача. Чему равна размерность этого пространства?

Theorem

Плоские кривые степени m, пересекающие данную гладкую плоскую кривую C нетрансверсально, образуют алгебраическую гиперповерхность в проективном пространстве плоских кривых степени m.

Дополнение к алгебраической гиперповерхности в комплексном проективном пространстве связно, поэтому количество точек пересечения кривой, отвечающей точке этого дополнения, с кривой $F = 0$ не зависит от точки дополнения, а значит, равно mk.

Лекция 2. Плоские алгебраические кривые: теорема Безу, пересечение с прямой

Пусть, например, $F = 0$ — прямая; ее степень равна 1. Ее можно параметризовать проективной прямой: $(x_0 + \alpha_t : y_0 + \beta t : z_0 + \gamma t)$.
Для определяния точек пересечения с кривой $G = 0$ степени m сделаем подстановку $G(x_0 + \alpha_t : y_0 + \beta t : z_0 + \gamma t)$. Корни полученного многочлена степени m дяют точки пересечения прямой и кривой. Если все корни простые, то точки пересечения трансверсальны и их количество равно m.

Лекция 2. Плоские алгебраические кривые: теорема Безу, второе доказательство

Пусть F — кубическая кривая, G — квадрика, представленные как многочлены от y

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= a_0y^3 + a_1(x,z)y^2 + a_2(x,z)y + a_3(x,z) \\ G(x,y,z) &= b_0y^2 + b_1(x,z)y + b_2(x,z) \end{aligned}$$

где a_i, b_i — однородные многочлены степени i.
В точках пересечения $(x_0 : y : z_0)$ кривых $F = 0$ и $G = 0$ эти многочлены имеют общий корень. Значит, существуют многочлены $f_1(y) = u_0y^2 + u_1y + u_2$ и $g_1(y) = v_0y + v_1$, такие, что

$$(a_0y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3)(v_0y + v_1) \equiv (b_0y^2 + b_1y + b_2)(u_0y^2 + u_1y + u_2),$$

что дает линейную систему уравнений на коэффициенты v_0, v_1, u_0, u_1, u_2:

$$\begin{aligned} a_0v_0 &= b_0u_0 \\ a_1v_0 + a_1v_1 &= b_1u_0 + b_0u_1 \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Эта система имеет ненулевое решение если и только если невырождена ее матрица

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы называется *результантом* многочленов F и G. Он однороден степени $\deg F \cdot \deg G$, его корни — X, z)-координаты точек пересечения кривых $F = 0$ и $G = 0$.

Семинар 2. Задачи

- Докажите *тождество Эйлера*: для однородного многочлена $F = F(x, y, z)$ степени d выполняется равенство
$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = d \cdot F.$$
- Воспользовавшись тождеством Эйлера, докажите, что в аффинной карте $z = 1$ условие гладкости $dF \neq 0$ точки кривой эквивалентно условию $df \neq 0$ в этой точке, где $f(x, y) = F(x, y, 1)$.

Семинар 2. Задачи

- Дайте определение кратности точки пересечения двух плоских кривых.
- Докажите общую теорему Безу: если две плоские кривые $F = 0$ и $G = 0$ имеют конечное число точек пересечения, то сумма кратностей этих точек равна произведению степеней кривых.

Семинар 2. Задачи

-

Семинар 2. Задачи

-
-