Домашнее задание (листок) 1

Анализ, 2 курс, весенний семестр, 29.01.2021

Дедлайн: 28.02.2021

Задача 1. Доказать полноту пространства $C^k[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, состоящего из k раз непрерывно дифференцируемых функций $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, снабженного нормой $\|f\|_k := \sum_{i=0}^k \max_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$, где $f^{(i)}$ обозначает i-ую производную функции f.

Задача 2. Доказать, что норма $\|\cdot\|$ нормированного пространства над полем *комплексных* чисел порождена скалярным произведением тогда и только тогда, когда для любых двух векторов x и y выполнено равенство параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Задача 3. Доказать, что следующие пространства не являются гильбертовыми: а) l_p при $p \in [1,2) \cup (2,\infty]$; б) $C[0,1]$.
Напомним, что пространство l_p состоит из последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, $x_k \in \mathbb{R}$, с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$.
Здесь и далее пространство непрерывных функций $C[a,b]$ снабжено стандартной нормой $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Задача 4. Доказать неравенство Коши-Буняковского в векторном пространстве V над полем *комплексных* чисел со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$: $|(x,y)| \le \|x\|\|y\|$ для любых $x, y \in V$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.

Задача 5. В пространстве $L^2(-1,1)$ найти расстояние от функции $x(t) = t + \cos t$ до подпространства $M = \{x \in L^2(-1,1) : \int_{-1}^0 x(t)dt = \int_0^1 x(t)dt\}$.

Задача 6. а) В пространстве l_2 найти расстояние от вектора $e_1 = (1,0,0,...)$ до подпространства $H_n = \{x \in l_2 : \sum_{k=1}^n x_k = 0, x_{n+1} = x_{n+2} = ... = 0\}$.
б) Докажите, что пространство $H = \{x \in l_2 : \sum_{k=1}^\infty x_k = 0\}$ плотно в l_2.

Задача 7. Пусть M — замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H. Рассмотрим произвольный вектор $v \in H \setminus M$ и вектор $v_M \in M$, такой что $\|v - v_M\| = \operatorname{dist}(v, M)$. Докажите, что $(v - v_M, w - v_M) \le 0$ для любого $w \in M$. Дайте геометрическую интерпретацию этому факту.

Задача 8. Примените процесс ортогонализации к последовательности одночленов $1, z, z^2, ...$, где $z = x + iy \in \mathbb{C}$, относительно следующих скалярных произведений:

$$\text{а)} \qquad (P,Q) = \iint_{|z|\le 1} P(z)\overline{Q}(z)dxdy, \qquad \text{б)} \qquad (P,Q) = \iint_{\mathbb{C}} P(z)\overline{Q}(z)e^{-|z|^2}dxdy$$

Задача 9. (*) Рассмотрим линейное пространство V, состоящее из конечных линейных комбинаций (над полем комплексных чисел) одночленов из предыдущей задачи (другими словами, их линейную оболочку). Докажите, что пополнения V относительно норм, порожденных скалярными произведениями из предыдущей задачи, состоит из аналитических функций f в круге или на комплексной плоскости, таких что $\iint_{|z|\le 1} |f(z)|^2 dxdy < \infty$ или $\iint_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dxdy < \infty$ соответственно (полученные пространства называются *пространствами Бергмана*).

Задача 10. Докажите, что система Радемахера $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ортонормированна, но не полна в $L^2(0,1)$.

Задача 11. Докажите, что система Уолша, состоящая из всевозможных конечных произведений функций из системы Радемахера, является ортонормированным базисом в $L^2(0,1)$.

Задача 12. Докажите, что в системе многочленов Чебышева I рода

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t),\ n = 0, 1, \ldots$$

а) $T_n(t)$ является многочленом степени n;
б) функция $T_n(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t^2)T_n''(t) - tT_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0;$$

в) все функции ортогональны в пространстве $L^2(-1,1)$ с весом $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$;
г) образуют в этом пространстве ортогональный базис.

Задача 13. (*) Докажите, что среди всех многочленов вида $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ наименьшую норму в вещественном пространстве $C[-1,1]$ имеет многочлен Чебышева I рода $T_n(t) = 2^{1-n}\cos(n \arccos t)$.