ПРОСТРАНСТВА МЕР И ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАНСПОРТИРОВКА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ:

X — компактное метрическое пространство с метрикой d

$\mathcal{B}(X)$ — класс борелевских множеств в X (наименьший класс, содержащий открытые множества и допускающий счетные объединения и дополнения)

вероятностная мера μ на X: функция $B \mapsto \mu(B)$ из $\mathcal{B}(X)$ в $[0,1]$,

$\mu(X) = 1$, $\mu(\cup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n)$ для попарно непересекающихся B_n

мера Дирака δ_a в точке a: $\delta_a(B) = 1$ при $a \in B$, $\delta_a(B) = 0$ иначе

мера Лебега λ на $[0,1]$: $\mu(B) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i|$, где inf по счетным покрытиям B промежутками интервалами (a_i, b_i)

$\mathcal{P}(X)$ — множество всех вероятностных мер на X

борелевское отображение $f\colon X \to Y$: $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$ для всех $B \in \mathcal{B}(Y)$

Все непрерывные — борелевские

Образ меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$ при борелевском отображении $f\colon X \to Y$ есть мера $\mu \circ f^{-1}$ на Y, заданная так:

$$(\mu \circ f^{-1})(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

Атом меры μ — точка положительной меры.

ТЕОРЕМА. *Для всякой меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$ есть такое борелевское отображение $f\colon [0,1] \to X$, что $\mu = \lambda \circ f^{-1}$.*

ЭТО ВЕРНО ТАКЖЕ, ЕСЛИ ВМЕСТО МЕРЫ ЛЕБЕГА ВЗЯТЬ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ВЕРОЯТНОСТНУЮ МЕРУ НА КОМПАКТЕ БЕЗ АТОМОВ.

ЗАДАЧА МОНЖА:

даны меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(X)$, непрерывная функция $h \geq 0$ на $X \times Y$, надо найти борелевское отображение $T\colon X \to Y$, для которого $\nu = \mu \circ T^{-1}$ и интеграл

$$\int h(x, Tx)\, \mu(dx)$$

минимален (или найти infimum таких интегралов)

Для меры σ на $X \times Y$ проекция на X есть образ при проектировании $(x,y) \mapsto x$, т.е. это мера $A \mapsto \sigma(A \times Y)$ на X. Аналогично проекция на Y есть мера $B \mapsto \sigma(X \times B)$.

Для заданных $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(X)$

$$\Pi(\mu,\nu) \quad \text{есть меры из } \mathcal{P}(X \times Y) \text{ с проекциями } \mu \text{ и } \nu$$

ЗАДАЧА КАНТОРОВИЧА: при тех же данных найти меру $\sigma \in \Pi(\mu,\nu)$, для которой интеграл

$$\int_{X\times Y} h(x,y)\sigma(dx\,dy)$$

минимален

ТЕОРЕМА. *В задаче Канторовича есть минимум. Если меры μ и ν не имеют атомов, то минимум Канторовича равен инфимуму Монжа.*

МЕТРИКА КАНТОРОВИЧА НА $\mathcal{P}(X)$:

$$d(\mu,\nu) = \sup_{f\in \mathrm{Lip}_1} \int f\,d\mu - \int f\,d\nu,$$

где Lip_1 — множество всех 1-липшицевых функций f, т.е. $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$.

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР μ_j к μ:

$$\int f\,d\mu_j \to \int f\,d\mu$$

для всех непрерывных f.

ЭТО РАВНОСИЛЬНО сходимости интегралов от всех $f \in \mathrm{Lip}_1$, а также сходимости по метрике Канторовича.