

## Семинар 17

(задачи для подготовки к дистанционной контрольной )

1. Может ли группа  $S_3$  быть группой Галуа неприводимого над  $\mathbb{Q}$  кубического многочлена с тремя вещественными корнями? (если да, то пример, пожалуйста)
2. Тот же вопрос про циклическую группу  $\mathbb{Z}_3$ . (если да, то пример, пожалуйста)
3. Верно ли, что  $\mathbb{Q}(1^{1/2021}) = \mathbb{Q}(1^{1/43}, 1^{1/47})$  (присоединяются все корни из 1)?
4. Верно ли, что  $\mathbb{Q}(1^{1/43}) \cap \mathbb{Q}(1^{1/47}) = \mathbb{Q}$ ?
5. Найти минимальный над  $\mathbb{Q}$  многочлен для числа  $\sqrt{3 + 2\sqrt{5}}$ . Найти группу Галуа этого многочлена.
6. Показать, что  $\sin \pi/12$  – алгебраическое число.
7. Доказать, что в конечном поле из  $2^n$  элементов из каждого элемента однозначно извлекается квадратный корень.
8. Докажите, что  $(1 + i)/\sqrt{2}$  – целое алгебраическое число.
9. Найдите кольцо целых поля  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ .
10. Докажите неприводимость над  $\mathbb{Q}$  многочлена  $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X - 1$ .
11. Найти группу Галуа поля  $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13})$ .
12. Может ли поле алгебраических чисел степени 2021 содержать примитивный корень 5-ой степени из 1?
13. Перечислить все подполя поля  $\mathbb{Q}(1^{1/5})$ .