Цель – д-к теор. Пеано.

Инструмент: равном. сходимость.

$f_k \in C([a,b])$ $\qquad f_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f$

$f_k \rightrightarrows f \;\cancel{\Leftarrow}\!\!\Rightarrow\; f_k(x) \to f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$\Updownarrow$

•) $\forall \varepsilon>0 \;\exists N \in \mathbb{N},\; N = N(\varepsilon) : \forall x \in [a,b] \;\forall k > N \quad |f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon$

•) $d(f_k, f) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $\qquad d(f,g) := \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$

Св-ва:

$\underline{1^\circ}$ $f_k \in C([a,b])$, $f_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C([a,b])$

(!) $\underline{2^\circ}$ ———— , ———— , ———— $\Rightarrow \int_a^b f_k(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$

$\underline{3^\circ}$ $(x,y) \longmapsto F(x,y)$ непр. $f_k \rightrightarrows f \Rightarrow x \mapsto F(x, f_k(x))$ $\quad g_k(x)$

$x \mapsto F(x, f(x))$ $\quad g(x)$

$\boxed{g_k \rightrightarrows g}$

Th. {(Ascoli–Arzelà) $\mathcal{F} \subset C([a,b])$

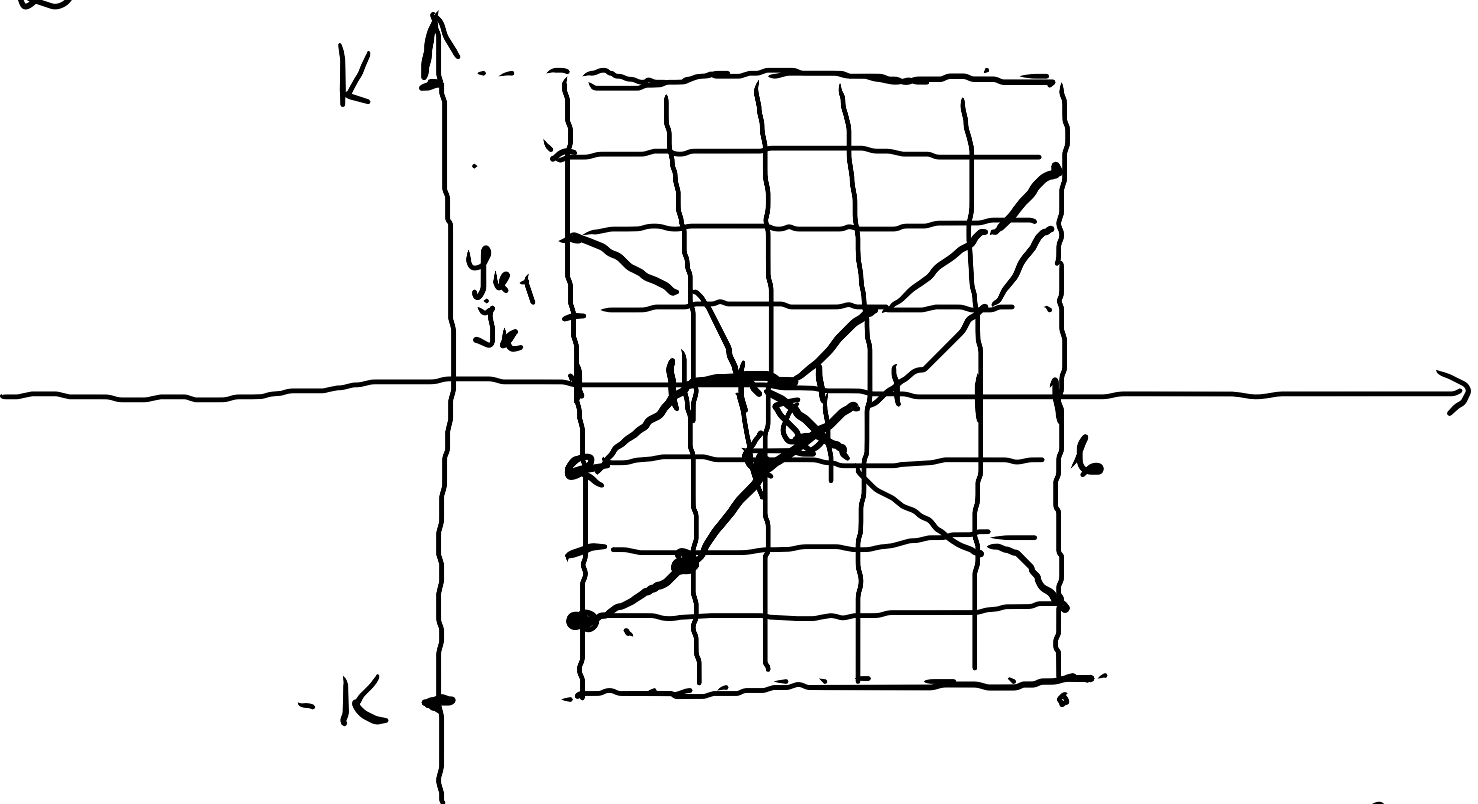
равном. огр. 1). $|f(x)| \le K \quad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall x \in [a,b]$

равностепенн. непр. 2). $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$

Тогда $\forall \{f_k\}_k \subset \mathcal{F} \quad \exists \{f_{k_\ell}\}_\ell :$

$$f_{k_\ell} \underset{\ell \to \infty}{\rightrightarrows} f \qquad f \in C([a,b])$$

Д-во.



Объяв. д-ть, что $\forall \varepsilon > 0$ у семейства $\mathcal{F}$ есть <u>конечн.</u> ε-сеть.

$\exists\, \varepsilon > 0$ — выбрано.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

$$|x_{k+1} - x_k| = \delta.$$

$$|y_{k+1} - y_k| < \varepsilon.$$

$\psi(x)$ — ломаная непр. на $[a, b]$.

Докажем: $\forall f \in \mathcal{F} \quad \exists \psi$ ломаная $\quad |f(x) - \psi(x)| < 5\varepsilon \quad (*)$

$\forall x \in [a, b]$

(то есть мн-во ломаных — 5ε-сеть).

1). $\forall f \in M \quad |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon$ (потому что $|x_{k+1} - x_k| = \delta$)

2). $|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| \le \overbrace{|\psi(x_k) - f(x_k)|}^{\le\varepsilon} + \overbrace{|f(x_k) - f(x_{k+1})|}^{\le\varepsilon} +$

$+ \underbrace{|f(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})|}_{\le\varepsilon} \le 3\varepsilon.$

3). $|\psi(x) - \psi(x_k)| \le 3\varepsilon.$

$\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$

4). $|f(x) - \psi(x)| \le \overbrace{|f(x) - f(x_k)|}^{\le\varepsilon} + \overbrace{|f(x_k) - \psi(x_k)|}^{\le\varepsilon} +$

$+ \overbrace{|\psi(x_k) - \psi(x)|}^{\le 3\varepsilon} \le 5\varepsilon.$

$f \in \mathcal{F}$

$x \in [x_k, x_{k+1}] \Rightarrow |x - x_k| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_k)| \le \varepsilon.$

Итого: $|f(x) - \psi(x)| \le 5\varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$

ч.т.д.

Th (Пеано)

$f \in C(D; \mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, h > 0$

$\exists\, y : [x_0 - h; x_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ — решение (1)

$$(1)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

D откр.

$y(\cdot) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}$

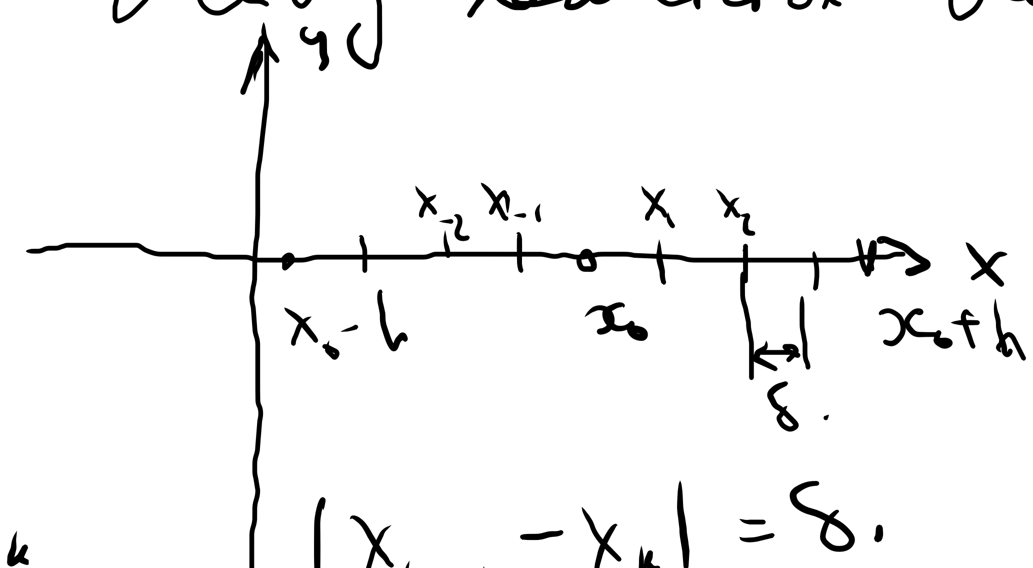
$x_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R}^n$

$(x_0, y_0) \in D.$

<u>Д-во:</u> (Эйлер).

Метод ломаных Эйлера

Идея $\quad \delta := \dfrac{h}{N}$



$|x_{k+1} - x_k| = \delta.$

$$\frac{dy}{dx} \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\Delta x = x_{k+1} - x_k$

$\Delta y = y_{k+1} - y_k$

А можно было бы интегрировать так

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

$$\Downarrow$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_{k+1}, y_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

$$\Downarrow$$

y_{k+1}

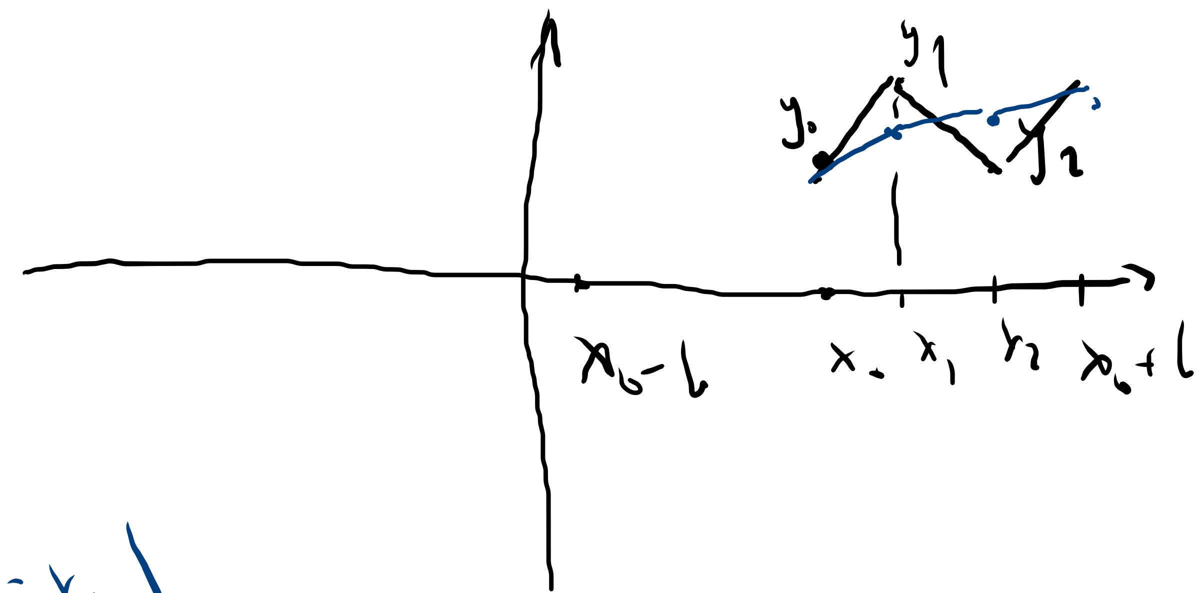
Неявная схема Эйлера

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y_k)$$

$$\Downarrow$$

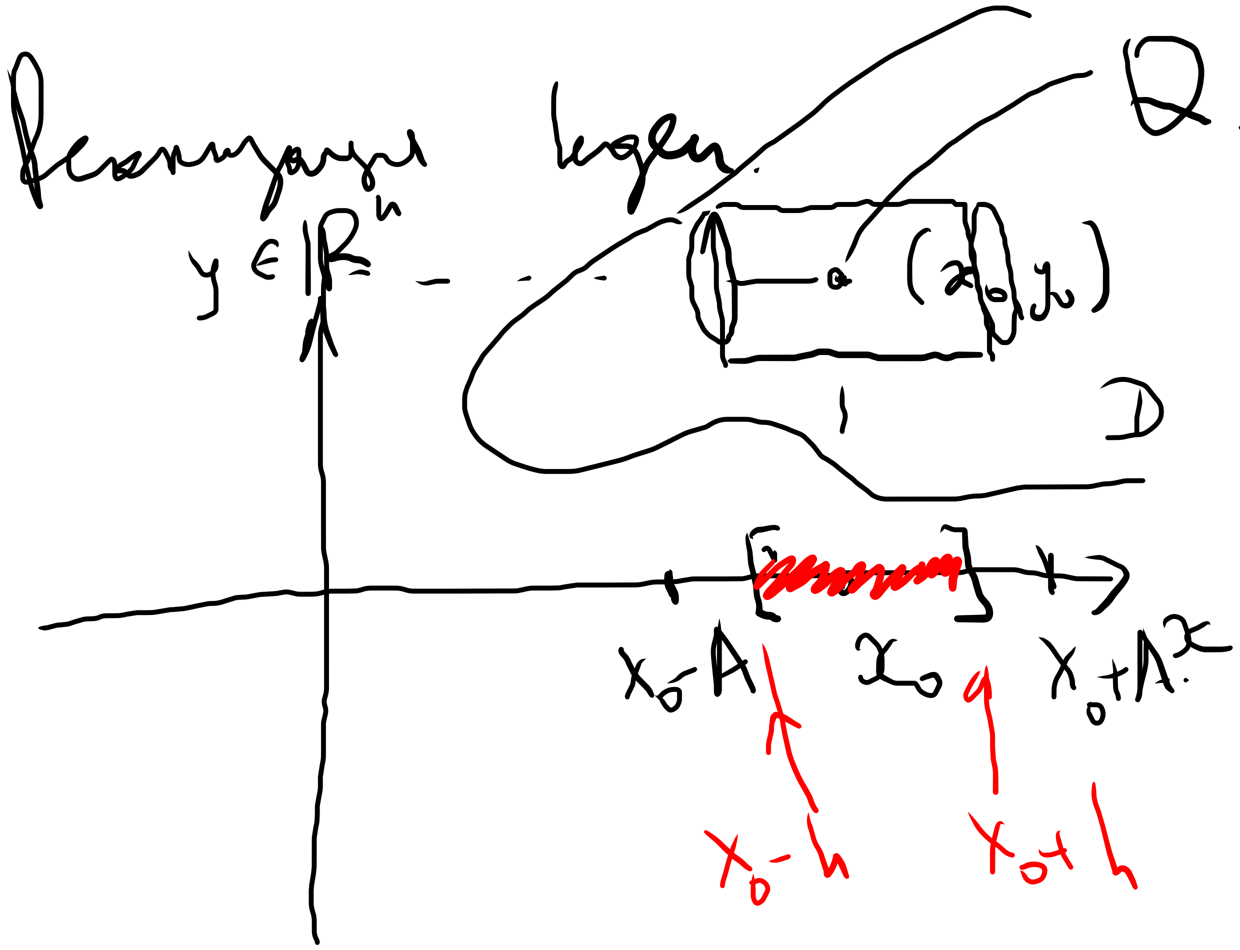
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Явная схема Эйлера



Ломаная Эйлера

[illegible]



$A, B > 0$

$$Q := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} |x - x_0| \le A, \\ |y - y_0| \le B \end{array} \right\}$$

Замкн цилиндр $\cap D$.

$$\max_{(x,y) \in Q} |f(x, y)| =: M$$

$$h := \min\left(A, \frac{B}{M}\right) > 0.$$

$$\delta = \frac{h}{N} \qquad N \in \mathbb{N}$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\delta} = y_k + f(x_k, y_k)\,\delta$$

$$|y_{k+1} - y_k| \leq \delta\, |\underbrace{f(x_k, y_k)}_{\leq M}| = \delta M$$

$$|y_k - y_0| \leq k\,\delta M \leq \cancel{N} \cdot \frac{h}{\cancel{N}} \cdot M = \underset{\substack{\wedge\!\!| \\ \frac{B}{M}}}{h} \cdot M \leq \frac{B}{\cancel{M}} \cdot \cancel{M} \leq B.$$

I.e. $(x_k, y_k) \in Q$.

Наблюдение 1. Иначе говоря, все построенные ломаные Эйлера $(\forall N \in \mathbb{N})$ внутри цилиндра Q.

$\Downarrow$

они равном. огр.

Наблюдение 2.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \dfrac{h}{N} : \text{ своя ломаная Эйлера } \psi \\ |\psi'(x) - f(x, \psi(x))| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (x_k, x_{k+1}) \end{cases}$$

Д-во наблюдения 2.

$\varepsilon > 0$ произв. выбрано. f непр. на $D \Rightarrow$ непр. на Q

$\Rightarrow f$ равном. непр. на Q.

$\uparrow$ теор. Кантора

$\exists \delta_1 > 0 \quad |x - \tilde{x}| \le \delta_1, \quad |y - \tilde{y}| < \delta_1, \quad x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in Q \Rightarrow |f(x,y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| < \varepsilon$

равном. непр. на Q.

$$\delta := \frac{h}{N} < \min\left(\delta_1, \frac{\delta_1}{M}\right)$$

$x \in (x_k, x_{k+1})$ $\quad \psi'(x) = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y_k)$.

$|x - x_k| \le |x_{k+1} - x_k| < \delta < \delta_1$.

$|y_{k+1} - y_k| \le \delta |f(x_k, y_k)| \le \delta M \le \delta_1$.

$|\psi(x) - y_k| \le \delta_1$.

$$\boxed{|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| \le \varepsilon} \quad |\underbrace{f(x_k, y_k)}_{\psi'(x)} - f(x, \psi(x))| \le \varepsilon$$

ч.т.д.

Собственно д-во теоремы:

$A, B, h, \dots$ выбрано

$\varepsilon_k := \frac{1}{k}$ $k \in \mathbb{N}$. $k \to \infty$

$\delta_k := \frac{h}{N_k} \to 0.$ $N_k \to \infty$

ψ_k

a) $\left| \psi_k'(x) - f(x, \psi_k(x)) \right| \le \varepsilon_k = \frac{1}{k}$ $\forall x$ кроме точек разбиения

ψ_k равн. огр. $\Leftarrow$ б) $(x, \psi_k(x)) \in Q$ $\forall x$

ψ_k - равност. непр. в) $\left| \psi_k(x) - \psi_k(\tilde{x}) \right| \le M \left| x - \tilde{x} \right|$ $x, \tilde{x}$ принадлежат одному промежутку

$\Rightarrow$

Th. Aceosu – Agyglià