$f(t) = |t|$ на $(-\pi, \pi)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Алгебра Винера. W

д-ть, что это слово здесь по делу.

$Lip \subset W.$

H - гильбертово пр-во : H, $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$

полное.

C вып. замкнутое $\subset H$ $\quad C \neq \emptyset$

$u \in H$.

Т-ма: $\exists\ v \in C$: $|u-v| = dist(u, C)$

$\left(dist(u,C) := \inf\{ |u-z| : z \in C \} \right)$.

$\left(v := Pr_C u \right)$

C zamkn., form. $\subset H$

$u \in H$ $\qquad f: C \to \mathbb{R}: \quad f(z) := |u - z|.$

$\{z_k\} \in C$: $\quad \begin{cases} f(z_1) \geq f(z_2) \geq f(z_3) \geq \dots \geq f(z_k) \geq . \\ f(z_k) \to \inf_{z \in C} f(z) =: d = \mathrm{dist}(u, C) \end{cases}$

$\quad f(z_k) = d_k. \qquad d_k \downarrow d.$

$$|x-y|^2 + |x+y|^2 = 2\left(|x|^2 + |y|^2\right)$$

$$\rightsquigarrow \left|\frac{x-y}{2}\right|^2 + \left|\frac{x+y}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(|x|^2 + |y|^2\right)$$

$x := u - z_n$

$y := u - z_m$

$$\frac{|z_m - z_n|^2}{4} + d^2 \leq \left|\frac{z_m - z_n}{2}\right|^2 + \left|u - \frac{z_m + z_n}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right)$$

$\frac{z_m + z_n}{2} \in C$

$$\left|u - \frac{z_m + z_n}{2}\right| \geq d$$

$$\frac{|z_m - z_n|^2}{4} \le \frac{1}{2}\left(\underset{\to d}{d_m^2} + \underset{\to d}{d_n^2}\right) - d^2 \longrightarrow 0$$

$$m, n \to +\infty$$

$\{z_k\}$ – фундаментальна $\Rightarrow$ $\exists z := \lim\limits_{k} z_k \in \mathbb{C}$,

$$d \underset{k \to \infty}{\leftarrow} |u - z_k| \longrightarrow |u - z|$$

$$|u - z| = d.$$

т.е. z – искомая точка! (ч.т.д.)

Отделяне упр.

$\rightsquigarrow$

$f(z) := |u - z|$ строго изп.

$f(tv + (1-t)w) \le t f(v) + (1-t) f(w) \quad \forall t \in [0,1]$

$<$ $\quad \forall t \in (0,1)$

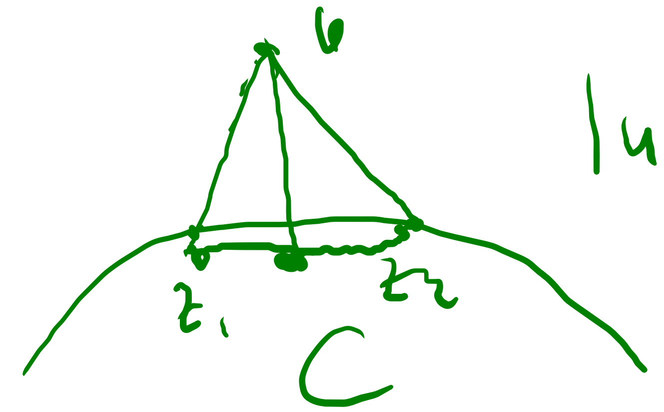
$(v \neq w)$.

$z_1 \neq z_2$

$z_1, z_2 \in C$,

$\tilde{z} := \frac{z_1 + z_2}{2} \in C$,

$|u - z_1| = |u - z_2| = \operatorname{dist}(u, C) =: d$



$|u - z| = f(z) < \frac{1}{2} f(z_1) + \frac{1}{2} f(z_2)$

$= \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$.

$\Rightarrow \boxed{z_1 = z_2}$, \ \ ???

Докажем строгую выпуклость $f(z) := |u-z|$.

$$|u - (tv + (1-t)w| = |tu + (1-t)u - (tv + (1-t)w)| =$$

$$= |t(u-v) + (1-t)(u-w)|$$

$|x| = |y| = 1$

$x = u - v$ $\quad |x| = d$

$y = u - w$ $\quad |y| = d$

$$|tx + (1-t)y|^2 < (t|x| + (1-t)|y|)^2$$

$x \neq y$

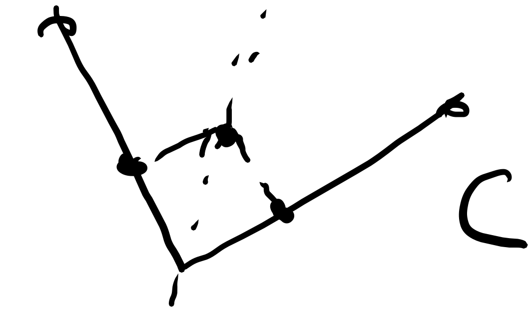
$t \in (0,1)$

$$\cancel{t^2|x|^2} + 2t(1-t)|x|\cdot|y| + \cancel{(1-t)^2}|y|^2 - \cancel{t^2|x|^2} - \cancel{(1-t)^2}|y|^2 - 2t(1-t)(x,y) =$$

$$= 2t(1-t)(|x|\cdot|y| - (x,y)) \geq 0 \quad (= 0, \text{ если } y = \lambda x)$$

$\lambda = 1 \Rightarrow y = x.)$

C замкн. $\subset H$ ← гильбертово пр-во.



$u \in H$, $u \notin C$ $\Rightarrow$ $\exists!$ точка v:

$$|u - v| = \mathrm{dist}(u, C)$$

Пример того, что не $\exists$:

$$H = \ell^2 \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty.$$

$$e_k = (0, \ldots, 0, \underset{\uparrow \text{ k-я координата}}{1}, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

$C := \{x_k\}$ $\qquad x_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right) e_k.$

$u := 0$

$$\operatorname{dist}(u, C) = 1.$$

$$\operatorname{dist}(u, C) = \inf_k \left\| u - \left(1 + \frac{1}{k}\right) e_k \right\| = \inf_k \left\| \left(1 + \frac{1}{k}\right) e_k \right\| =$$

$$= \inf_k \left(1 + \frac{1}{k}\right) \underbrace{\|e_k\|}_{=1} = \inf_k \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1.$$

(Д/З) ?? $\quad$ C – замкн.

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ измер.}, \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p\, dx < +\infty \right\}$$

$\boxed{p \geq 1}$

(в частности, мы уже вводили в лекциях L^2, L^1) ($p = 2, 1$).

Упр

1) $u(x) = (1 + |x|)^\alpha$ при каких α эта ф-ция $\in L^p(\mathbb{R}^n)$.

2) $v(x) = |x|^\alpha$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p\, dx < +\infty$$

$$\cdot) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{\alpha \cdot p} \, dx$$

$$\cdot) \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} \, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{\alpha p} \, dx = \overbrace{\mathrm{Area}(\partial B_1(0))}^{\underbrace{\int\int\int}_{n-1} d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1}} \int_0^{+\infty} (1+\rho)^{\alpha p} \rho^{n-1} \, d\rho$$

$$\mathrm{Area}(\partial B_1(0)) = n\omega_n = 4\pi$$

$$\omega_n = \mathrm{Vol}(B_1(0))$$

$$\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx = n\omega_n \int_0^{+\infty} \underbrace{(1+\rho)^{\alpha p} \rho^{n-1}}_{\sim \rho^{\alpha p + n - 1}} \, d\rho < +\infty$$

$v \in L^p(B_1(0))$

$$\alpha p + n - 1 < -1.$$

$$\alpha p < -n$$

$$\boxed{\alpha < -n/p.}$$

$$\rho^{\alpha p + n - 1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^p \, dx = n\omega_n \int_0^{+\infty} \rho^{\alpha p} \rho^{n-1} \, d\rho.$$

$v \in L^p(B_1(0))$

$$\int\limits_{\underbrace{B_1(0)}} |v|^p \, dx = n\omega_n \int_0^1 \rho^{\alpha p} \rho^{n-1} \, d\rho$$

$\alpha p + n - 1 > -1$

$B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\alpha > -n/p}$$

Упражнение. $u(x) = |x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha$. $x \in \mathbb{R}^2$

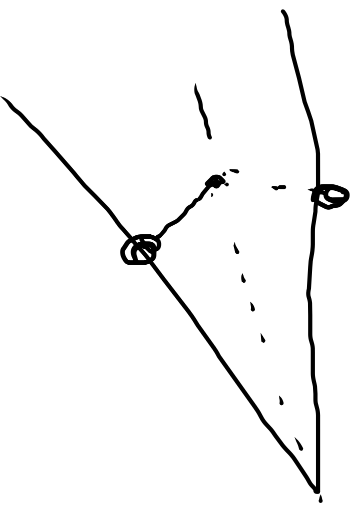
Для каких α эта функция $\in L^p(B_1(0))$

$p \geq 1$. $B_1(0) \subset O$.

Замечание $H = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$

C произвольное, ~~комп.~~ замкн.,

$\forall u \in \mathbb{R}^n \ \exists v \in C$: $\operatorname{dist}(u, C) = \|u - v\|$



Д-во: 1) C - комп.: $f : C \to \mathbb{R}$, $f(z) := \|u - z\|$

Она непр $\Rightarrow$ достигает min $\Rightarrow$ ...

2) C замкн $\tilde{v} \in C$.

$$\operatorname{dist}(u, C) \le \|u - \tilde{v}\| =: R$$

$$\tilde{C} := \overline{B}_R(u) \cap C \text{ — комп.}$$

$\Rightarrow \exists$ точка, реализ. расст. в $\tilde{C}$ (она же реализует и расст. в C).