H, $(\cdot,\cdot) \rightsquigarrow |\cdot|$

Def. $\cdot) \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in H$ полная, если $\overline{\operatorname{span}\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}} = H$.

$\cdot)\ (x_\alpha, x_\beta) = 0$, $\alpha\neq\beta$

ортонормальной (топологический) базис пр-ва H.

Базис (Гамеля) $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$: $\forall u\in H$

$u = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i u_{\beta_i}$ $\quad \lambda_i\in\mathbb{R}$ $\quad (\lambda_i\in\mathbb{C})$

Th. H сепараб. $\Rightarrow$ В H существует ортогональный (топологический) базис.

Д-во: $\overline{\{\psi_i\}}_{i \in \mathbb{N}} = H$. $\leadsto$ выбрасываем все лин. зависимые элементы.

$\downarrow$ Gram-Schmidt.

$\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортогон. базис.

$|\varphi_i| = 1$. ортонормированный базис

$\{\varphi_i\}$ – ортонорм. система векторов в H.

$f \in H$.

$$f = \sum_i c_i \varphi_i \qquad c_i \in \mathbb{R} \quad (c_i \in \mathbb{C}).$$

в смысле $\|\cdot\|$.

$$(f, \varphi_j) = \sum_i c_i \underbrace{(\varphi_i, \varphi_j)}_{\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}} = c_j.$$

(1) $\quad c_i := (f, \varphi_i)$

$\sum_i c_i \varphi_i$ – ряд Фурье для f

c_i – коэфф. Фурье.

$$S_N := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i \qquad |f - S_n|^2 = ?$$

$$|f - S_n|^2 = (f - S_n, f - S_n) = |f|^2 - 2(f, S_n) +$$

$$+ |S_n|^2 = |f|^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$$

$$|S_n|^2 = (S_n, S_n) = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \underbrace{(\varphi_i, \varphi_j)}_{\delta_{ij}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

$$(f, S_n) = \left(f, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (f, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$$

$$\|f-S_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{N} \alpha_i c_i + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{N} c_i^2 - \sum_{i=1}^{N} c_i^2$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - c_i)^2 \geq$$

$$\geq \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \qquad (\text{"="}, \text{ если } \alpha_i = c_i).$$

S_n : $0 \leq \|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2$

$\uparrow_{\alpha_i = c_i}$

Следствие. $f \in H$ $\quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \|f\|^2$ (2)

Нер-во Бесселя.

Когда в (2) бывает равенство?

Def. $\{\varphi_i\}$ ортонор. система $\subset H$ называется <u>замкнутой</u>, если $\forall f \in H$.

(3) $$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = |f|^2$$, где $c_i = (f, \varphi_i)$.

"Теор. Пифагора"

Равенство Парсеваля.

$$S_N := \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i$$

$$|f - S_N|^2 = |f|^2 - \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \to \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Итого: $\{\varphi_i\}$ ортонор. сист. в H замкнута

Означает, что $\forall f \in H$

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$$

в смысле $\|\cdot\|$, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i \right\| = 0.$$

Th. H сепараб. $\{\varphi_i\}$ ортонорм. сист. замкн., если и только если она полна.

Д-во: 1) $\{\varphi_i\}$ – ортонормир. сист. в H, замкнута

$$\forall f \in H \qquad \underline{f} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i = \underline{\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i}$$

$\Rightarrow \{\varphi_i\}$ полна.

2). $\{\varphi_i\}$ – ортонормир. сист. в H, полна.

$$\forall f \in H \qquad f = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^N \varphi_i \qquad c_i = (f, \varphi_i)$$

$$\left| f - \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i \right| \le \left| f - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^N \varphi_i \right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \Rightarrow f = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i,$$

$c_i = (f, \varphi_i)$

т. е. $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$,

иначе говоря, $\{\varphi_i\}$ замкн.

ч.т.д.

$\exists \{\varphi_i\}$ ортонормир. система H.

$$f \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i \qquad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < +\infty.$$

($c_i = (f, \varphi_i)$ для какой-то $f \in H$, то $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \le \|f\|^2 < +\infty$)

Def. H $(\cdot,\cdot)$ гильбертово, если оно полное (отн. $\|\cdot\|$).

Th. (Рисса–Фишера). H – гильбертово, $\{\varphi_i\} \subset H$ ортонормир. система, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty \Rightarrow \exists!\, f \in H$, такая, что $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$, и при этом вып. (3) $c_i = (f, \varphi_i)$

Д-во: $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$ $\qquad S_n := \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$

$$|S_n - S_{n+p}|^2 = (S_n - S_{n+p}, S_n - S_{n+p}) =$$

$$= \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} c_i \varphi_i , \sum_{j=n+1}^{n+p} c_j \varphi_j \right) = \sum_{i,j=n+1}^{n+p} c_i c_j \overset{\delta_{ij}}{\cancel{(\varphi_i, \varphi_j)}} =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i^2 \longrightarrow 0 \qquad n \to \infty \Longrightarrow$$

$$\exists \lim_{n \to \infty} S_n =: f$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < +\infty$$

$$(f, \varphi_i) = (f - S_n, \varphi_i) + \underbrace{(S_n, \varphi_i)}_{c_i} = c_i + (f - S_n, \varphi_i)$$

$$|(f - S_n, \varphi_i)| \leq \underbrace{|f - S_n|}_{\substack{\downarrow 0 \\ n \to \infty}} \cdot \underbrace{|\varphi_i|}_{= 1} \longrightarrow 0 .$$

$$n \to 0$$

$$\boxed{(f, \varphi_i) = c_i .}$$

$$0 \leftarrow |f - S_n|^2 = (f - S_n, f - S_n) = |f|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \lim_{n} \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = |f|^2$$

(равенство Парсеваля).

q.e.d.

H n-мерно, $\Rightarrow H \simeq \mathbb{R}^n$.

Следствие. H бесконечном. сепараб. гильбертово пр-во. Тогда $H \simeq \ell^2$.

$\ell^2 := \{x = \{x_i\} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty\}$.

$\|x\|_2 := \sqrt{\sum x_i^2}$

$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$

$\mathbb{R}^n = \ell^2(\{1, \dots, n\})$

$H_1 \simeq H_2$. $\exists j : H_1 \to H_2$ лин. обратимый.

$\|j(u)\|_{H_2} = \|u\|_{H_1}$, $(j(u), j(v))_{H_2} = (u, v)_{H_1}$

Д-во: $H \simeq l^2$.

$f \in H \overset{j}{\rightsquigarrow} c \in l^2$ $c = (c_1, c_2, \ldots, \ldots)$

$c_i = (f, \varphi_i)$

$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < +\infty \Rightarrow c \in l^2$.

$\{\varphi_i\}$ — полная ортонорм. система.

линейность $\longrightarrow$ 1). $j: f \mapsto c = \{c_i = (f, \varphi_i)\}$.

$$(f+g, \varphi_i) = (f, \varphi_i) + (g, \varphi_i)$$

$$(\lambda f, \varphi_i) = \lambda (f, \varphi_i)$$

Т. Рисса-Фишера

обратимость $\longrightarrow$ 2) $c \in l^2$ (т.е. $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < +\infty$) $\Rightarrow c = j(f)$

изометрия $\longrightarrow$ 3). $\quad \|j(f)\|_2^2 = \|c\|_{\ell^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \|f\|_H^2.$

j сохр. скал. произв. $\longrightarrow$ 4).

$$j(f) = c = (c_1, \dots, c_k, \dots)$$
$$j(g) = d = (d_1, \dots, d_k, \dots)$$
$$c_i = (f, \varphi_i), \quad d_i = (g, \varphi_i)$$

проверить дома! $\quad (f, g)_H = (c, d)_{\ell^2} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i d_i.$