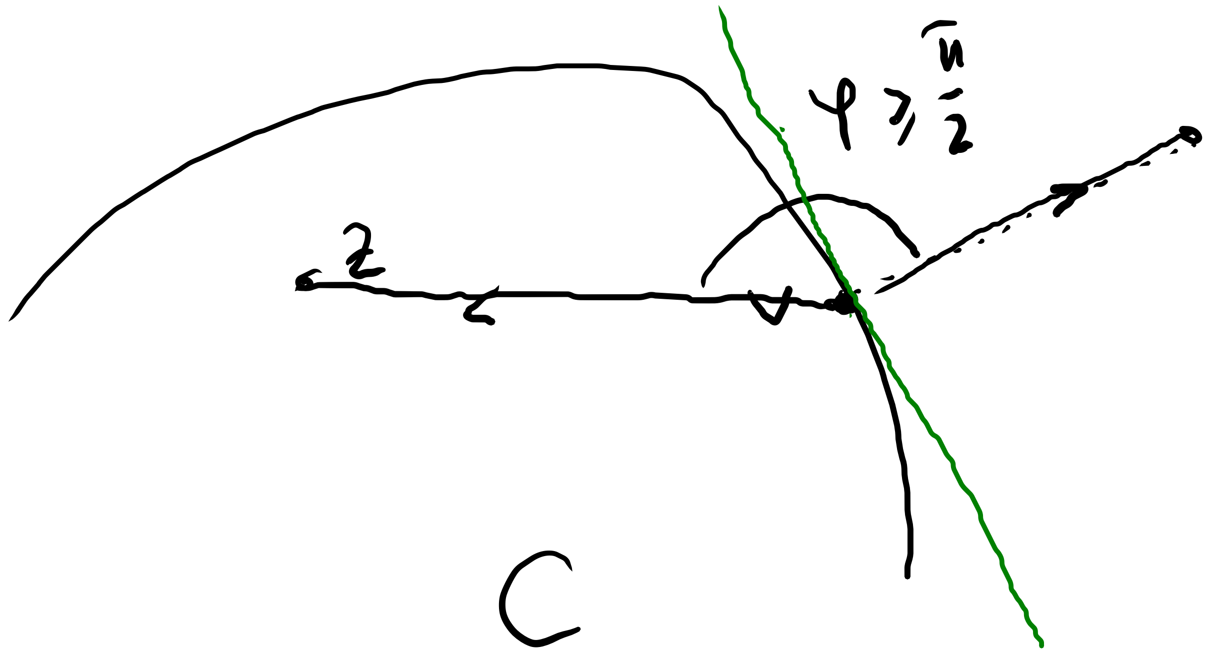
H - гильбертово пр-во; $C \subset H$ замкн., выпуклое

Доказать: $\forall u \in H \quad \exists!\ \underbrace{v \in C}_{\text{проекция } u \text{ на } C} : \quad |u - v| = \operatorname{dist}(u, C)$

$$\left(\operatorname{dist}(u, C) := \inf_{z \in C} |u - z| \right)$$

Упражнение 1: д-ть $\forall z \in C : \quad (u - v, z - v) \le 0$



$x, y \in H$.

φ - угол между x и y:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

Что такое $x \perp y$? Это значит $\varphi = \frac{\pi}{2} \iff (x, y) = 0$

Решение задачи: все точки "отрезка $[z, v]$" это

$$\{(1-t)v + tz : t \in [0,1]\}$$

Идея: рассм. точки на этом отрезке, близкие к v. (иначе говоря, $t \in [0,1]$, $t \approx 0$.)

$(t \to 0)$

$$f(t) := \left| u - \big((1-t)v + tz\big) \right|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = |u - v|^2 = \mathrm{dist}^2(u, C) \quad , f'(0) =$$

$$f(t) - f(0) = f'(0)t + o(t)$$

$$f(t) := |u - v + tv - tz|^2 = |\underbrace{u-v}_{x} + t(\underbrace{v-z}_{h})|^2$$

$$g(t) := |x+th|^2 \qquad t \in \mathbb{R} \qquad x, h \in H$$

$$\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = \left.\underbrace{2(x+th, h)}\right|_{t=0} = 2(x, h).$$

проверка.

$$\frac{dg}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(t+\varepsilon) - g(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|x+th+\varepsilon h|^2 - |x+th|^2}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{|x+th|^2} + 2\cancel{\varepsilon}(x+th, h) + \overset{\varepsilon}{\cancel{\varepsilon^2}}|h|^2 - \cancel{|x+th|^2}}{\cancel{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(2\underbrace{(x+th, h)} + \overset{0}{\cancel{0(1)}}\right)$$

$$f'(0) = 2(u-v, v-z)$$

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t)$$ при $t \to 0$.

$$= f(t) - f(0) = f'(0)t + o(t) = 2(u-v, v-z)t + o(t)$$

$$= \|u - (\underbrace{(1-t)v + tz}_{\substack{\cap \\ C}})\|^2 - \mathrm{dist}^2(u, C) \geqslant 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

C, если $t \in [0,1]$.

$$f'(0)t + o(t) \geqslant 0 \qquad t \to 0^+$$

$f(0) \geqslant$, $\quad \frac{o(t)}{t} = o(1)$

$$f'(0) \geq 0 \iff (u-v, v-z) \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(u-v, z-v) \leq 0, \quad \text{z.z.g.}$$

Упражнение 2. $S \subset H \qquad S \neq \emptyset$

$$S^\perp := \{ v \in H : (u, v) = 0 \quad \forall u \in S \}.$$

Д-ть, что $S^\perp$ — замкнутое линейное подпр-во H.

Д-во. 1) линейность $v_1, v_2 \in S^\perp$

$$(u, \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}_{\in S^\perp}) = \lambda_1 \underset{0}{\underset{\parallel}{(u, v_1)}} + \lambda_2 \underset{0}{\underset{\parallel}{(u, v_2)}} = 0$$

замкнутость ⇒ 2). $v_k \in S^\perp$, $v_k \to v$.

$(u, v_k) = 0 \quad \forall u \in S$

$$(u, v) = \lim_k \overset{0}{\overset{\parallel}{(u, v_k)}} = 0.$$

$\Rightarrow v \in S^\perp.$

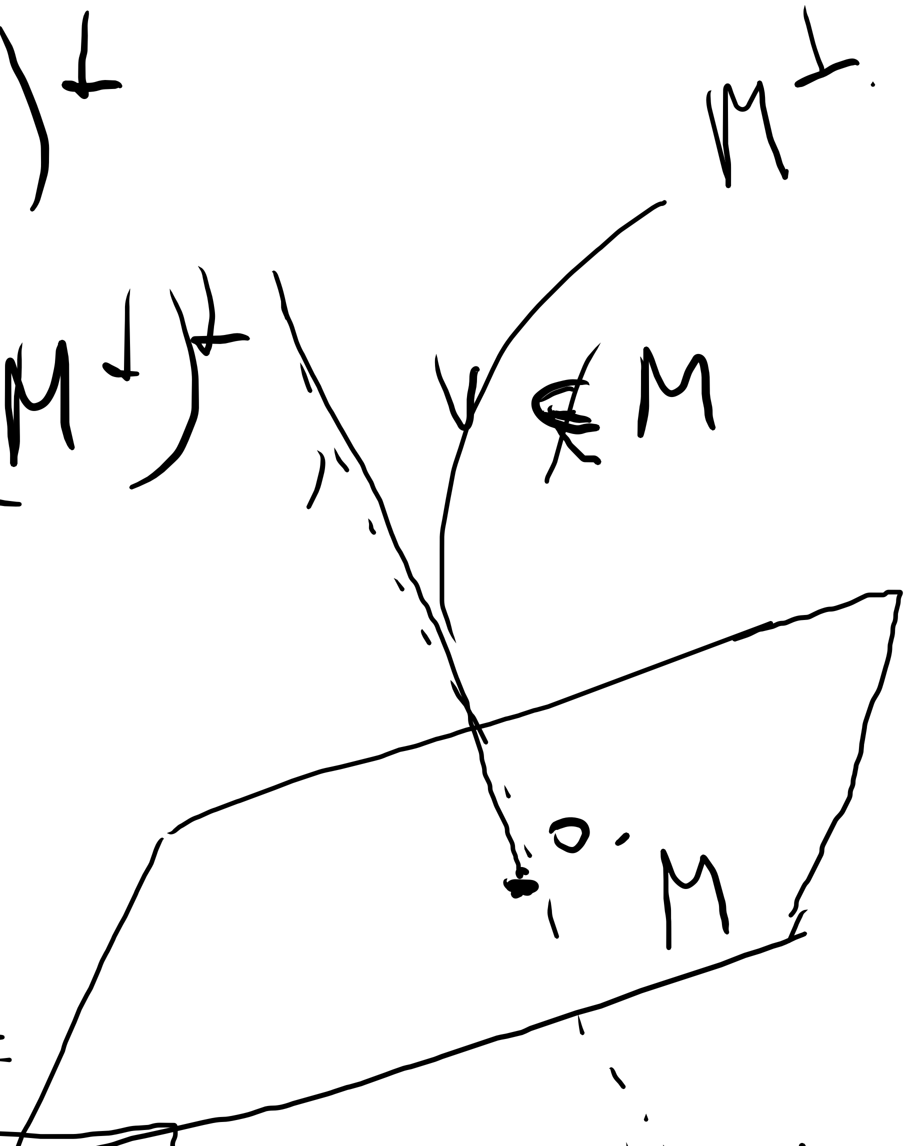
Упражнение 3. $M \subset H$ замкнутое линейное подпр-во.

Д-ть: $(M^\perp)^\perp = M$.

Д-во:

1). $M \subset (M^\perp)^\perp$

2). $\exists \exists\ v \in (M^\perp)^\perp$, $v \notin M$



$$\left\{\begin{aligned} & H = M \oplus M^\perp \\ & \forall v \in H\ \exists!\ v_1 \in M,\ v_2 \in M^\perp; \\ & v = v_1 + v_2. \end{aligned}\right.$$

$$v = \underset{M}{\underset{\cap}{v_1}} + \underset{M^\perp}{\underset{\cap}{v_2}}$$

$\underset{0}{\underset{\neq}{\tilde{v}}} \in M^\perp$; $0 = (v, \tilde{v}) = (v_1, \tilde{v}) + (v_2, \tilde{v}) =$

$0 = (v_2, \tilde{v}) \Rightarrow \boxed{v_2 = 0} \Rightarrow v = v_1 \in M.$

Наблюдение

$M \cap M^\perp = \{0\}$.

Вопрос. $S \subset H, \quad S \neq \emptyset$

$$(S^\perp)^\perp = ?$$

мн. подпр-во, замкн.

$\supset S.$

$$(S^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span} S}$$

Д/з: доказать это.

Упражнение 4. $H = L^2(-\pi, \pi)$

$$M := \left\{ u \in H : \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot u(x)\, dx = 0 \right.$$

Вопрос: $M^\perp = ?$

$$(u,v)_{L^2(-\pi,\pi)} := \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\,dx$$

$$M := \{ v \in L^2(-\pi,\pi) : (v, \sin x) = 0 \}.$$

$$M = \{\sin x\}^{\perp}$$

$$M^{\perp} = \left(\{\sin x\}^{\perp}\right)^{\perp} = \{ \lambda \sin x ;\ \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Упр. 4'') $N := \left\{ v \in L^2(-\pi, \pi) : \int_{-\pi}^{\pi} v\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} v \sin x = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} v \cos x = 0 \right\}.$

$$N^{\perp} = \left\{ \lambda_0 + \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} \simeq \mathbb{R}^3$$

Упражнение 5. {Привести пример незамкн. подпр. в гильбертовых и банах. пр-вах.

1°) $H = L^2(-\pi, \pi)$ $\quad M = \operatorname{span}\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots \sin kx, \cos kx\}$

$\overline{M} = H.$ $\neq$

$\underline{2^\circ)}$ $C([0,1])$ M = мн. во всех ~~многочленов~~ мн. тригонометр. многочленов.

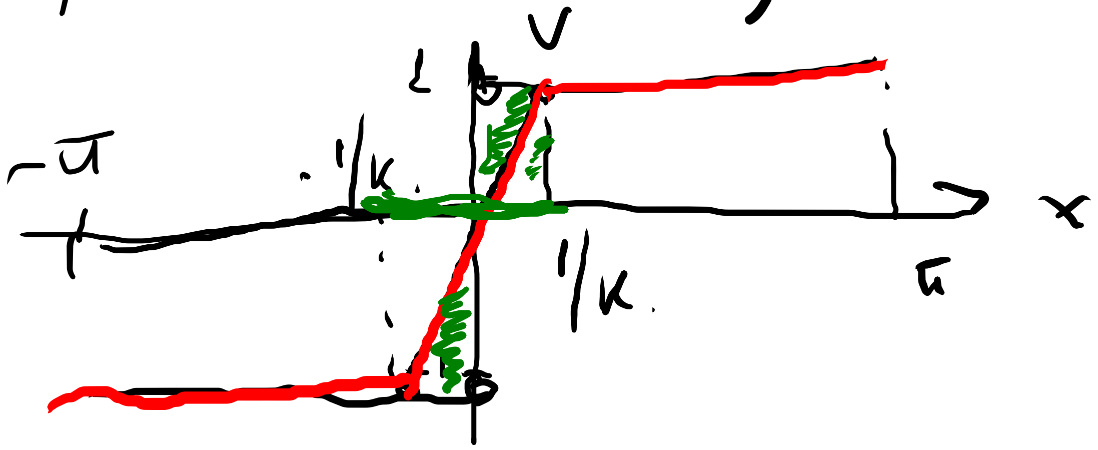
$\overline{M} = C([0,1])$, $M \neq C$

$\underline{3^\circ)}$ $H = L^2(-\pi,\pi)$, $M = C([-\pi,\pi])$.

$\overline{M} = H$.

$(\ \overline{M} \neq M$: $v \in \overline{M}$, $v \notin M\ )$

$v(x) = \operatorname{sign} x$



$v_k \in M$, $|v_k - v| \to 0$.

$\int_{-\pi}^{\pi} |v_k(x) - v(x)|^2 dx \to 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v_k - v|^2 = \int_{-1/k}^{1/k} |v_k - v|^2 = \int_{-1/k}^{0} |v_k + 1|^2 + \int_{0}^{1/k} |v_k - 1| =$$

$v_k(x) = kx.$

$$= \int_{-1/k}^{0} (kx+1)^2 + \int_{0}^{1/k} (kx-1)^2 = \frac{1}{k}\,\frac{(kx+1)^3}{3}\Bigg|_{-1/k}^{0} + \frac{1}{k}\,\frac{(kx-1)^3}{3}\Bigg|_{0}^{1/k} =$$

$$= 2\,\frac{1}{k}\,\frac{1}{3} \longrightarrow 0. \quad k \to +\infty$$

Упр. 6. } Привести пример $\overline{B} \subset H$ некомп.

$\overline{B}$ = замкн. шар, H — гильбертов

Реш. $H = \ell^2$ $\qquad \overline{B} := \{ u : |u|_2 \leq 1 \}$

$$u_k = (0, 0, \dots, \underset{k\text{-я поз}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \dots) \qquad |u_k|_2 = 1$$

$$u_k \in \overline{B}$$

(!!) $\rightsquigarrow$

$$|u_k - u_m|_2^2 = \|(0, 0, \dots, \underset{m}{\underset{\uparrow}{-1}}, 0, \dots, \underset{k}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \dots)\|_2^2 = 2.$$

$$k \neq m$$