Базовые факты. H — пр-во со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$

$\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ $(N \le +\infty)$ полная ортонорм. система.
= замкнутая

1). $f \in H$ $\qquad f = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \qquad c_i \in \mathbb{R}$

в смысле $|\cdot|$ $\qquad c_i := (f, \varphi_i)$

более того $\quad |f|^2 = \sum_{i=1}^N |c_i|^2 \quad$ равенство Парсеваля $\quad (1)$
("теорема Пифагора")

(!)

2). $\sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$, такой, что $\sum_{i=1}^N |c_i|^2 < +\infty$.

Если H — гильбертово, то $\exists f : f = \sum c_i \varphi_i$, и тогда, (также
$c_i = (f, \varphi_i)$ и
вып. (1)

Ортогональные дополнения

H - гильбертово пр-во.

$S \subset H$, $S \neq \emptyset$

$$S^{\perp} := \{ v \in H : \underbrace{(u,v) = 0}_{u \perp v} \quad \forall u \in S \}$$

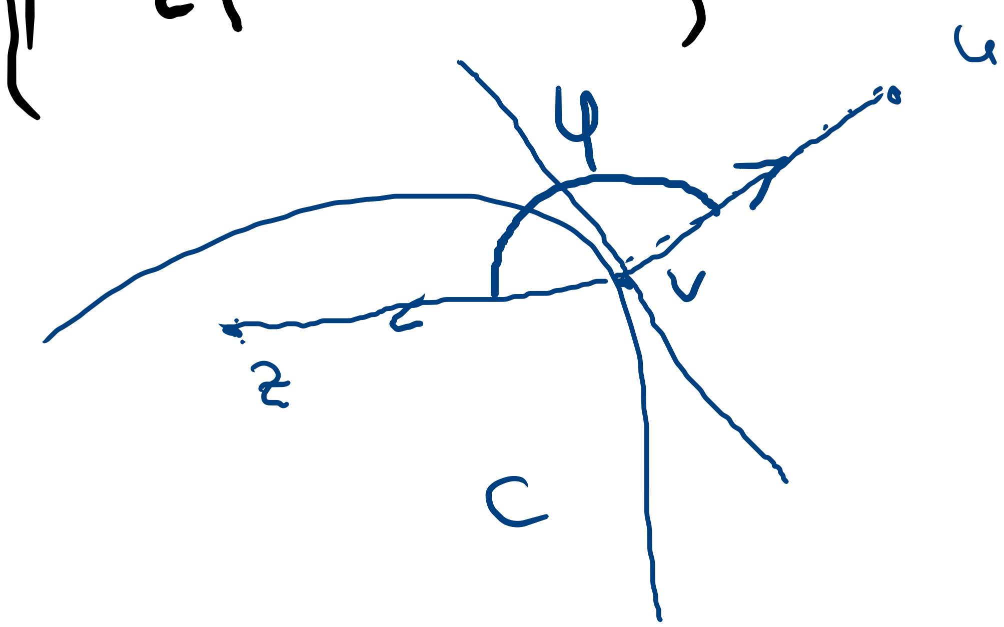
1° $S^{\perp}$ - линейное многообр., замкнутое. (замкнутое подпр-во)

2° $C \subset H$ выпуклое замкнутое $\quad \forall u \in H \quad \exists !\, v \in C$, реализ. расстояние $dist(u, C)$,

проекция u на C.

т.е. $\|u - v\| = dist(u, C) := \inf \{ \|u - z\| : z \in C \}$

$$\underline{(u - v, z - v)} \le 0 \quad \forall z \in C,$$



3° $M \subset H$ замкн. подпр-во.

$\forall u \in H \ \exists!\, v \in M : \quad |u-v| = dist(u, M).$

Докажем, что $(u-v, h) = 0 \quad \forall h \in M$

Д-во: $f(t) = |u - v + th|^2$

$|u - (v - th)|^2$, $\quad v - th \in M$

$f'(0) = 2(u-v, h)$

$$|u - (\underbrace{v - th}_{\in M})|^2 = f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t) = \underbrace{|u-v|^2} + 2(u-v,h)t + o(t)$$

$$0 \le |u - v + th|^2 - |u-v|^2 = 2(u-v,h)\,t + o(t) \quad \forall t \to 0.$$

$t > 0$: $\quad 2(u-v,h) \ge \dfrac{o(t)}{t} = o(1) \to 0, \quad t \to 0^+$

$t < 0$: $\quad 2(u-v,h) \le \dfrac{o(t)}{t} = o(1) \to 0, \quad t \to 0^-$

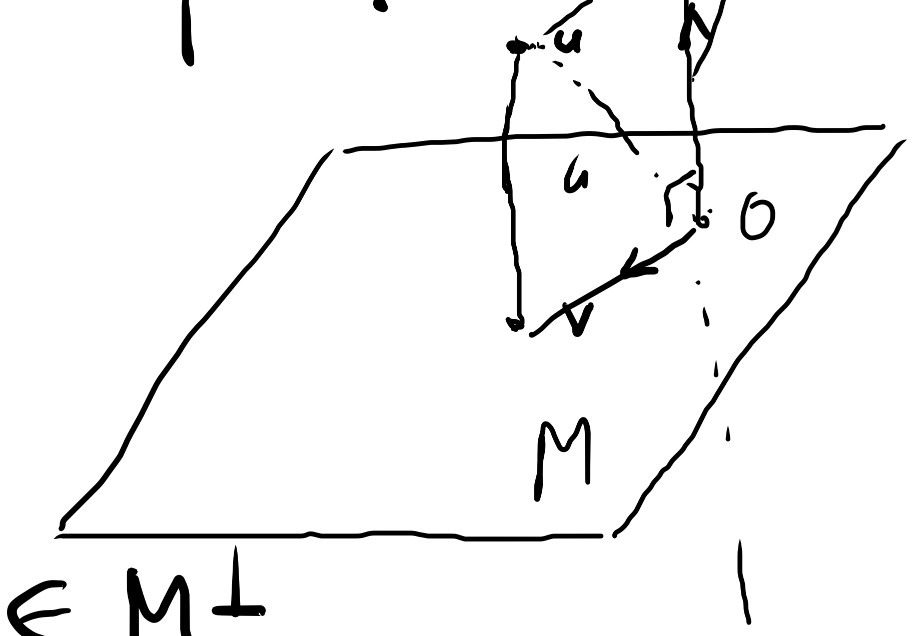
$$\Downarrow$$

$$\boxed{(u-v,h) = 0},$$ ч.т.д.

Prop. M — замкн. подпр. в H, $H = M \oplus M^\perp$, то есть $\forall u \in H$ $\exists!\,(v, v^\perp) \in M \times M^\perp$: $u = v + v^\perp$, при этом $|u|^2 = |v|^2 + |v^\perp|^2$ (снова "Теор. Пифагора")

Замечание: $M \cap M^\perp = \{0\}$

Д-во: $u \in H$. v — проекция u на M.



$v^\perp := u - v$

$(v^\perp, v) = (u - v, v) = 0$

$(v^\perp, \underset{\underset{M}{\cap}}{h}) = (u - v, h) = 0 \Rightarrow v^\perp \in M^\perp$

$u = v + v^\perp$ $\qquad |u|^2 = |v + v^\perp|^2 = |v|^2 + |v^\perp|^2 + 2\cancel{(v^\perp, v)}^{=0}$.

Осталось д-ть единств.

$u = v_1 + v_1^\perp$, $v_1 \in M$, $v_1^\perp \in M^\perp$

$-\ u = v + v^\perp$

$\underbrace{(v_1 - v)}_{z} + \underbrace{(v_1^\perp - v^\perp)}_{z\,!} = 0$

$z \in M$, $z^\perp \in M^\perp$ $\qquad z + z^\perp = 0$

$$0 = |z + z^\perp|^2 = |z|^2 + |z^\perp|^2 + 2\overset{0}{\cancel{(z, z^\perp)}}$$

$$\Downarrow$$

$$|z| = |z^\perp| = 0 \Rightarrow V = V_1,\ V^\perp = V_1^\perp.$$

Вернемся к рядам Фурье

$\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ — ортонормированная система в H (не обязательно полная).

$N \le +\infty$

$M := \overline{\mathrm{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^N}$ — замкн подпр-во в H. (тем самым, гильбертово с тем же $(\cdot,\cdot)$)

$\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ — **полная** (!) ортонормальная система в M.

$$\forall v \in M \quad \exists! \, \{c_i\}_{i=1}^N : v = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i, \quad c_i = (v, \varphi_i), \quad |v|^2 = \sum_{i=1}^N |c_i|^2$$

отдельно прокомментир.

$$\exists\, v = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i = \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i$$

$$0 = \sum_{i=1}^N (c_i - d_i)\varphi_i$$

$$\sum_{i=1}^N |c_i - d_i|^2 = 0$$

$$c_i = d_i \ \forall i$$

$$\forall u \in H : u = \underset{M}{\underset{\cap}{v}} + \underset{M^\perp}{\underset{\cap}{v^\perp}} = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i + v^\perp$$

$$M^\perp = \left(\overline{\operatorname{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^N}\right)^\perp = \left(\{\varphi_i\}_{i=1}^N\right)^\perp$$

$$|u|^2 = |v|^2 + |v^\perp|^2 = \sum_{i=1}^N |c_i|^2 + \underbrace{|v^\perp|^2}_{\text{ошибка в нер-ве Бесселя}}$$

Критерий полноты

<u>Теор.</u> $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ $(N \le +\infty)$ ортонорм. $\subset H$

<u>полна</u>, если и только если

$$v^{\perp} \in \{\varphi_i\}_{i=1}^{N} \Rightarrow v^{\perp} = 0.$$

$$\left(\left(\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}\right)^{\perp} = \{0\} \right)$$

Примеры полных ортонормальных систем.

0° $\mathbb{R}^n$, $(\cdot,\cdot)$ $\quad (x,y) = x\cdot y$.

$\{e_i\}_{i=1}^n$

1° ℓ^2 $\quad e_i = (0, \dots 0, 1, 0, \dots\dots, 0, \dots)$

i-я позиция.

$$(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} (e_i)_k \cdot (e_j)_k = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$|e_i|_2 = 1$.

Почему это полная система?

Докажем полноту: $\exists\, v \in \left(\{e_i\}_{i=1}^{\infty}\right)^{\perp}$

$$(e_i, v) = 0 \quad \forall i$$

$$v = (0, 0, \ldots, 0, \ldots) = 0 \Rightarrow \{e_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ полна.}$$

3°) $H = L^2(-\pi, \pi)$ $\qquad (u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) v(x)\, dx$

$$|u| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u|^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$

<u>Утверждение</u>: $L := \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin kx, \cos kx \ldots\}$, $k \in \mathbb{N}$

Это полная ортогональная система.

(чтобы из нее сделать ортонормированную, надо будет $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$)

Проверка $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi.$

(ok!)

Д-во этого факта.

1°

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx = 0 \quad \forall k, \forall m.$$

Ортогональность.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0, \text{ если } k \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0 \quad \forall k.$$

2° Полнота ($\equiv$ замкнутость).

2.1) $M := \{ u \in C([-\pi,\pi]) : u(-\pi) = u(\pi) \} \subset C([-\pi,\pi])$

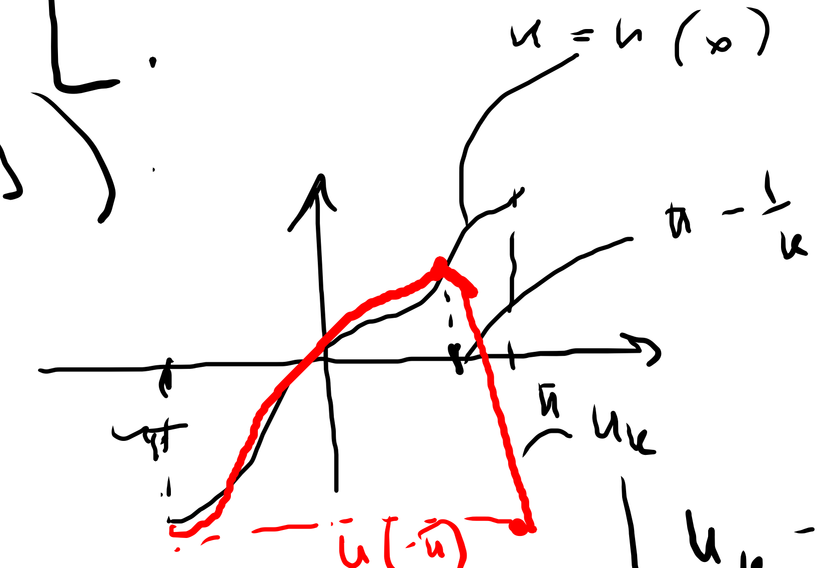
замкн. подпр-во

с равном. нормой.

Следствие Stone-Weierstrass $\rightsquigarrow$ Th Weierstrass: в M плотно мн-во span L.

2.2) $\overline{M}^{\|\cdot\|_2} \supset C([-\pi,\pi])$.

т.е. $M \subset L^2(-\pi,\pi)$.



$|u_k - u|^2 =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |u_k - u|^2 \, dx = \int_{\pi - \frac{1}{k}}^{\pi} |u - u_k|^2 \, dx \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

проверить ЧЕСТНО

2.3° $C([-\pi, \pi]) \subset L^2(-\pi, \pi)$

$$\overline{C([-\pi, \pi])}^{\|\cdot\|_2} = L^2(-\pi, \pi)$$

(!) иначе говоря непр. на $[-\pi, \pi]$ функции плотны в $L^2(-\pi, \pi)$.