Упр. 1.

Линейное Д.У. 1 порядка.

$$\begin{cases} y' = 2xy - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(\cdot) \in \mathbb{R}$

Задание – исследовать траектории в зависимости от (x_0, y_0).

$f(x, y) := 2xy - 1 \Rightarrow$) лок. существование

) единственность. (!)

Д/З:) интервалы монотонности

точки выпуклости/вогнутости.

) симметрии. ?

$$y(x) = u(x)\,v(x)$$

$$y' = u'v + v'u = \underbrace{2xuv} - 1.$$

$$v\,(\underbrace{u' - 2xu}_{=0}) + v'u = -1.$$

подберем $u(\cdot)$ так.

$$u' = 2xu.$$

$$\frac{du}{u} = 2x\,dy$$

$$\ln|u| = x^2 + C$$

$$\boxed{u := e^{x^2}}$$

$$v' e^{x^2} = -1.$$

$$v' = -e^{-x^2}$$

$$v(x) = -\int_{x_0}^{x} e^{-s^2}\, ds + C.$$

erfc. — функция ошибок.

$$y(x) = u(x)v(x) = e^{x^2}\left(C - \int_{x_0}^{x} e^{-s^2}\, ds\right)$$

$$y_0 = y(x_0) = e^{x_0^2} C \Rightarrow C = y_0 e^{-x_0^2}$$

Д/З: нарисовать графики в зависимости от (x_0, y_0)

$$\boxed{y(x) = e^{x^2}\left(y_0 e^{-x_0^2} - \int_{x_0}^{x} e^{-s^2}\, ds\right)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Пр. 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - t^2 - 1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ур-е Riccati

1). $f(t,x) := x^2 - t^2 - 1$ $\quad$ Dom $f = \mathbb{R}^2$

f - непр., и даже гладкая. $\Rightarrow$ лок. $\exists$ решения. единств. решения.

2). $\dot{x} > 0$ $\quad$ $x^2 - t^2 - 1 > 0$ $\quad$ $x^2 - t^2 > 1$.

< 0 $\quad$ < 0

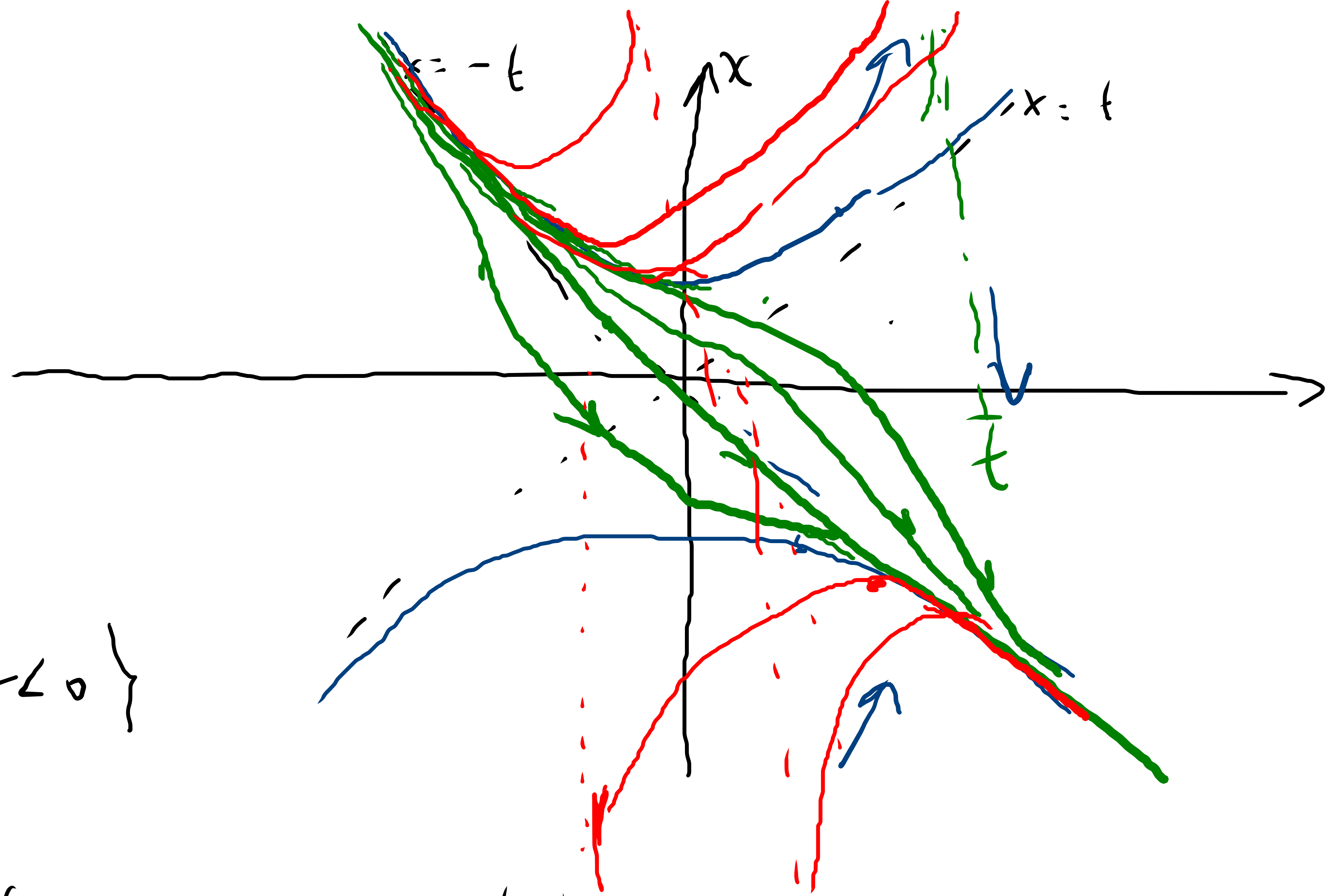
$= 0$ $\quad$ $= 0$.

$(x^2 - t^2 - 1)$.

решение

3). $x(t) = -t$ $\quad$ $-1 = \dot{x}$ $\quad$ $x^2 - t^2 - 1 = t^2 - t^2 - 1$

$= -1$



$\{x+t<0\}$ $\{x+t>0\}$

3) $x(t) = -t + v(t)$

$\dot{x} = -1 + \dot{v} = (-t+v)^2 - t^2 - 1$

$\dot{v} = \cancel{t^2} - 2vt + v^2 - \cancel{t^2} = v^2 - 2vt =$

$= v(v-2t)$

Надо бы добавить к тому, что было сказано: (!)

Случай 1.3

$x_0 + t_0 > 0$

$$C(t_0, x_0) = \frac{e^{-t_0^2}}{x_0 + t_0} = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \lambda(t_0)$$

$$x(t) = -t + \frac{e^{-t^2}}{C(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\,ds}$$

$$\exists \ \forall t \in \mathbb{R}$$

При $t \to +\infty$ $\quad C(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\,ds \to 0$

$x(t) + t \to +\infty.$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t^2}}{C - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\,ds} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-2t\,\cancel{e^{-t^2}}}{-\cancel{e^{-t^2}}} = +\infty.$$

Случай 2.3°| $x_0 + t_0 < 0$.

$$0 > C(t_0, x_0) = \frac{e^{-t_0^2}}{x_0 + t_0} = \lambda(t_0) = \int_{t_0}^{-\infty} e^{-s^2}\,ds.$$

Аналогично (или симметрично).

$t \to -\infty$ $\qquad$ $x(t) + t \to -\infty$.

$(\simeq 2t)$

$$\dot v = v^2 - 2vt.$$ Bernoulli

$(v \equiv 0$ — решение$)$.

$$v(t) := \frac{1}{u(t)}$$

$$\boxed{x(t) = -t + \frac{1}{u(t)}}$$

$$\dot v = -\frac{1}{u^2}\dot u = \frac{1}{u^2} - \frac{2t}{u}.$$

$$\boxed{\dot u = 2tu - 1.}$$ линейное уравнение 1 порядка.

$$u(t) = e^{t^2}\left(C - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\,ds\right)$$

$$x(t) = -t + e^{-t^2}\cdot\frac{1}{C - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\,ds}$$

$x_0 = x(t_0) = -t_0 + e^{-t_0^2} \Big/ \big((- \;\; \circ \big)$

$$\boxed{C = \frac{e^{-t_0^2}}{x_0 + t_0}} \qquad C = C(t_0, x_0)$$

$$x(t) = -t + \frac{e^{-t^2}}{C - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\,ds} \qquad (*).$$

Región 1.

$x_0 + t_0 > 0 \Rightarrow x(t) + t > 0.$

$C(t_0, x_0) > 0.$

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\, ds.$$

1). $t < t_0$ $\quad f(t) < 0$

$$x(t) = -t + \frac{e^{-t^2}}{C - f(t)}$$

$\Rightarrow x(t)$ опред. $\forall\, t < t_0$

$\vee$
$0.$

2) $t \geq t_0$ $\quad f(t) \geq 0$ $\quad f(t) \leq \overbrace{\int_{t_0}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds}$ $= \lambda(t_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}.$$

2.1). $f(t) < C \quad \forall t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lambda(t_0) < C(t_0, x_0)} \qquad (1)$$

Случай 1.1°

Если (1), то $x(t)$ опред. и $\forall t \geq t_0$ (а значит, и $\forall t \in \mathbb{R}$).

2.2). Иначе $\exists \bar{t} \geq t_0$: $\bar{t} = \bar{t}(t_0, x_0)$.

$$f(\bar{t}) = C(t_0, x_0).$$

Случай 1.2

Тогда $x(t)$ опред. $\forall t \in [t_0, \bar{t})$ (а значит, $\forall t \in (-\infty, \bar{t})$)

Сл. 1.1: •) $t \to -\infty$

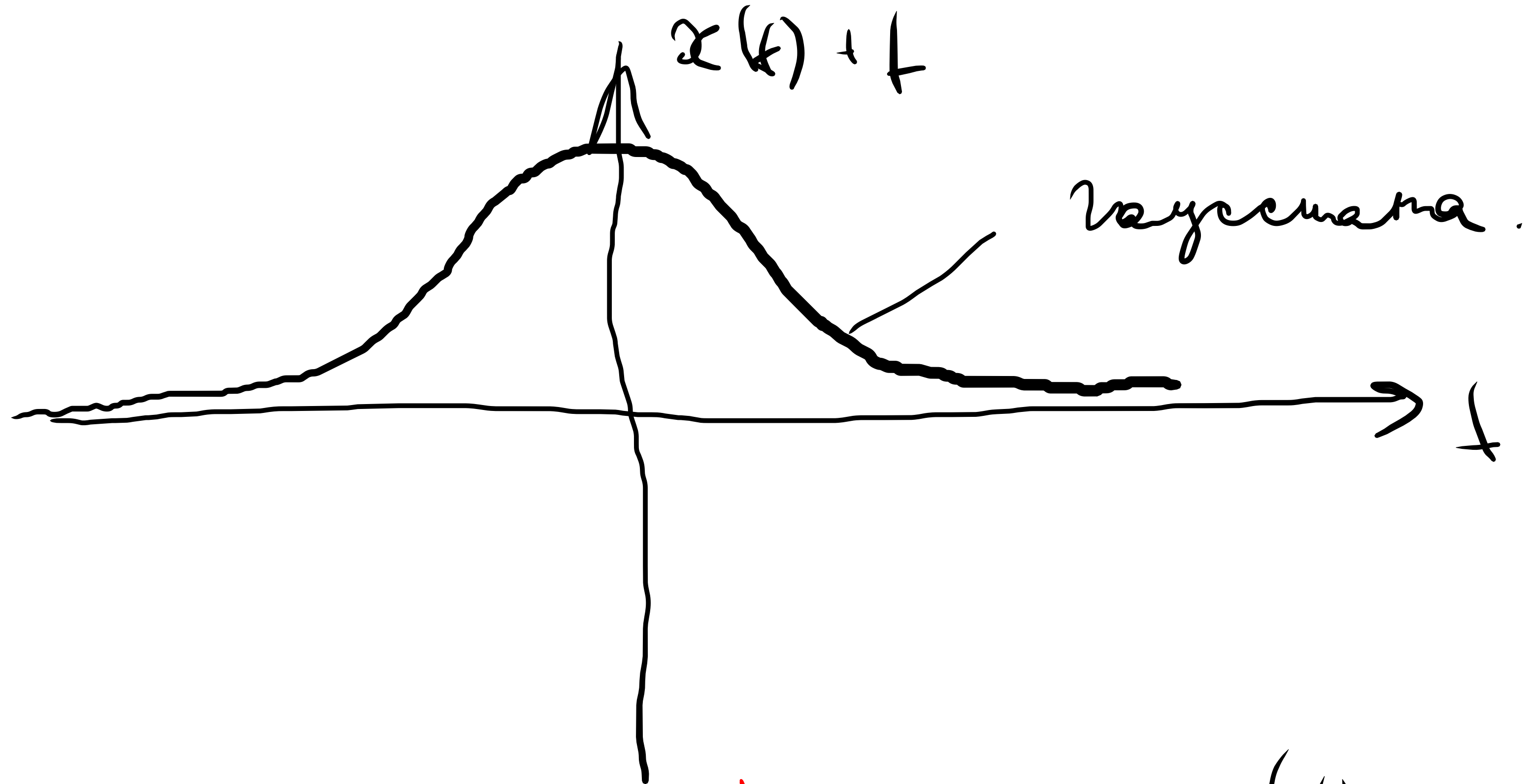
$$x(t) + t = \frac{\overset{\to 0}{e^{-t^2}}}{C(t_0, x_0) - \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\,ds}_{\to C_1 > 0}} \to 0.$$

Иначе говоря, $x(t) = -t + o(1)$

•). $t \to +\infty$

$x(t) + t \to 0$ i.e. $x(t) = -t + o(1)$

(Иначе говоря, при $t \to \pm\infty$ $x(t) \approx -t + Ce^{-t^2}$)



Сл. 1.2°.1

$x(t)$ опред. для $t \in (-\infty, \bar{T}(t_0, x_0))$

$\rightarrow)$ $t \to -\infty$

$$x(t) + t = \frac{e^{-t^2}}{C(t_0,x_0) - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\,ds} \to 0.$$

$e^{-t^2} \to 0$

$C(t_0,x_0) - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\,ds \to C_1$

$\rightarrow)$ $t \to \bar{T} - 0.$ $\Rightarrow x(t) \to +\infty.$

$t = \bar{T}(t_0, x_0)$ — верт. асимпт.

Случай 2: $x_0 + t_0 < 0$

$$x(t) = -t + \frac{e^{-t^2}}{C(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\, ds},$$

$$C(t_0, x_0) = e^{-t_0^2} / (t_0 + x_0) < 0.$$

1). $t > t_0$ $\quad C(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\, ds < 0$

Вместо повтора рассуждений.

$$y(t) := -x(-t).$$

$$\dot y(t) = \dot x(-t) = -(-t)^2 - 1 + (-x(-t))^2 =$$

$$= -t^2 - 1 + y^2(t)$$