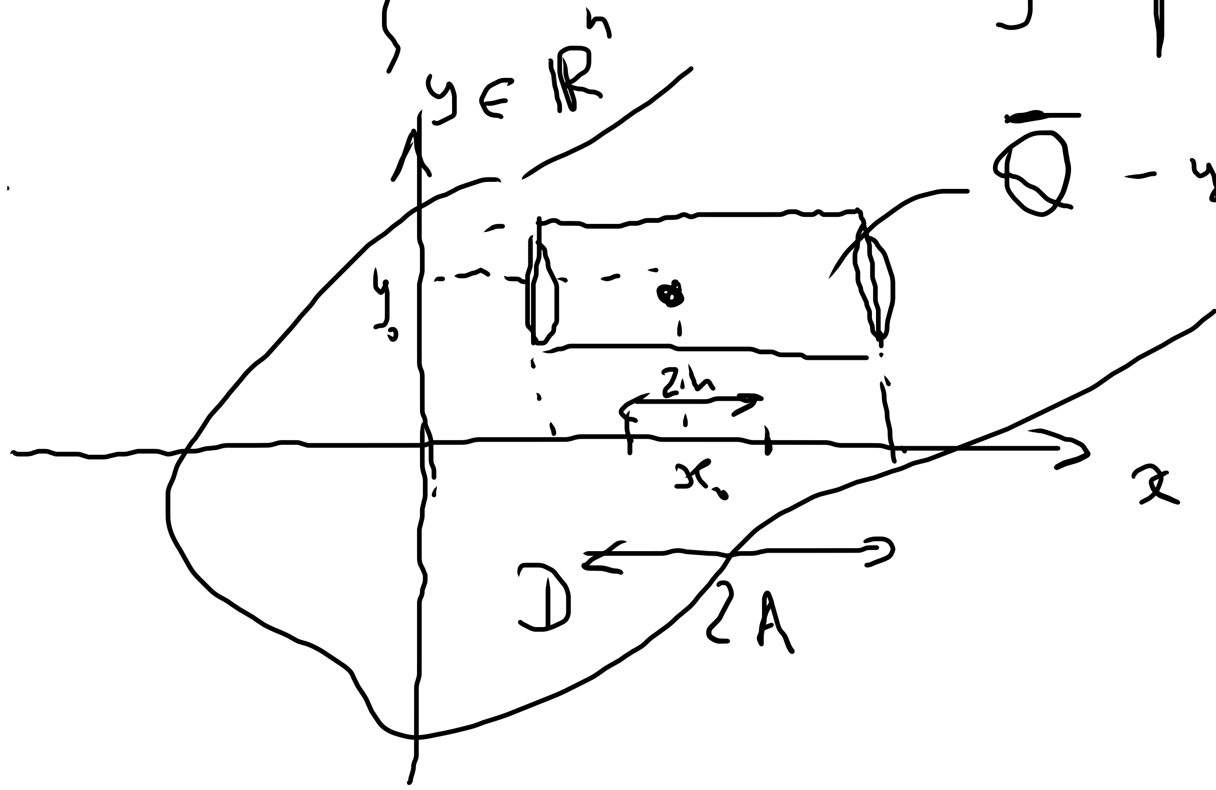
$$(*)\quad \begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(\cdot) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R} \\ f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x_0, y_0) \in D \end{cases}$$

__Теор.__ (Пеано) $f \in C(D; \mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists\, h > 0, \ \exists\, y \in C^1([x_0 - h, x_0 + h]; \mathbb{R}^n)$

y – решение $(*)$

__Д-во.__



$\overline{Q}$ – цилиндр $\subset D$ $\qquad \overline{Q} := [x_0 - A, x_0 + A] \times \overline{B}_R(y_0)$

$$h := \min\left(A, \frac{R}{\max\limits_{\overline{Q}} |f|}\right)$$

$\varepsilon_k \downarrow 0$ (например, $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$)

$\left(\delta_k := \frac{h}{N_k}\right)$, $N_k \in \mathbb{N}$

$y_k : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ $\quad (x, y_k(x)) \in \overline{Q}$

(1) $\quad |y_k'(x) - f(x, y_k(x))| < \varepsilon_k \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ кроме точек деления отрезка

- y_k – кусочно линейные (в частности, непр.)
- $|y_k(x)| \le C(|y_0|, R)$, т.е. y_k равном. ограничены
- y_k – равностеп. непрерывны

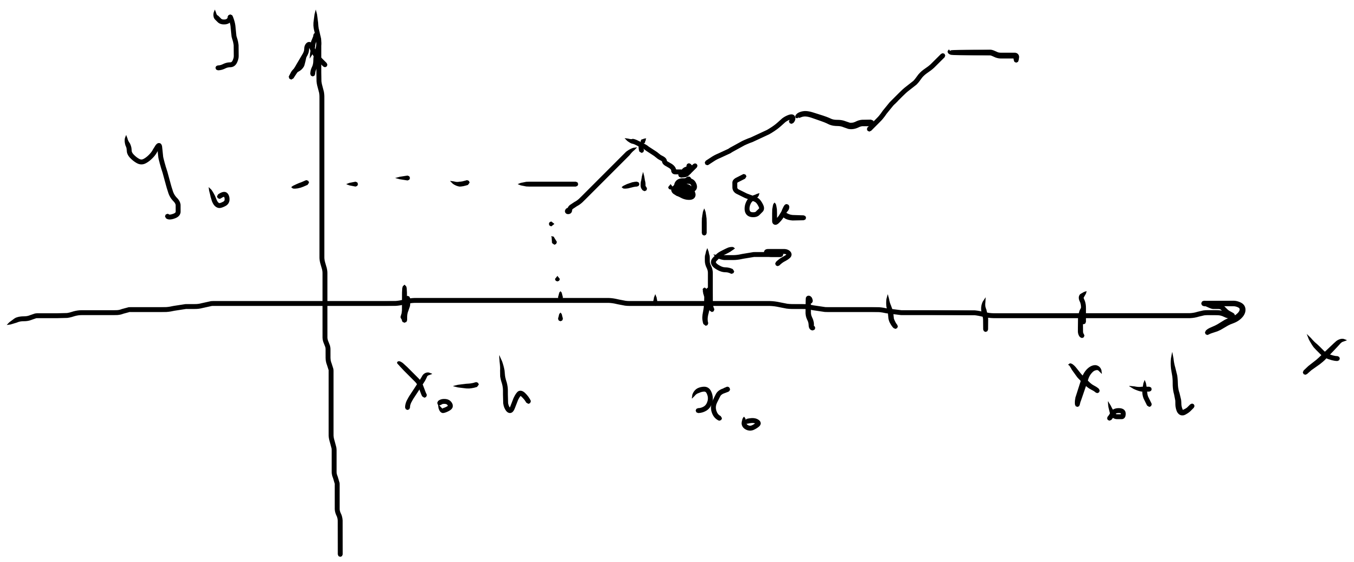
Теор. Асколи–Арцела

$\exists \{y_{k_\ell}\}_\ell \quad y_{k_\ell} \rightrightarrows y \; : \; y : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ непрерывная.

Докажем, что y – реш. (*)

(2) $y_k'(x) - f(x, y_k(x)) =: \omega_k(x)$

ω_k непр кроме точек деления отрезка



$$|\omega_k(x)| < \varepsilon_k.$$

$$\begin{cases} y_k' = f(x, y_k(x)) + \omega_k(x). \\ y_k(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y_k(x) - \underbrace{y_k(x_0)}_{y_0} = \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))\,ds + \int_{x_0}^{x} \omega_k(s)\,ds$$

$f(s, y(s))$

$$y_{k_\ell}(x) = y_0 + \boxed{\int_{x_0}^{x} f(s, y_{k_\ell}(s))\,ds} + \int_{x_0}^{x} \omega_{k_\ell}(s)\,ds \qquad \ell \to \infty$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

$y(s)$

$$\left|\int_{x_0}^{x} \omega_{k_\ell}(s)\,ds\right| \leq \varepsilon_{k_\ell}|x-x_0| \leq 2h\varepsilon_{k_\ell} \longrightarrow 0.$$

$$\varepsilon_{k_\ell} \to 0$$

$$|\omega_{k_\ell}(s)| \leq \varepsilon_k$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y \in C^1([x_0-h, x_0+h]; \mathbb{R}^n)$, т.е. $y(\cdot)$ – реш. $(*)$,

ч.т.д.

Единственность решения (*).

Теор. $\begin{cases} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le K|y_1 - y_2| & (3) \\ f \in C(D; \mathbb{R}^n) \end{cases}$

Тогда решение (*) существует на $[x_0 - h, x_0 + h]$ и единственно.

Как проверить (3)? Например, (3) вып. в окрестности (x_0, y_0), если $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непр. в окр. (x_0, y_0) (4)

Пример: $f(x,y) = x|y|$. Для этой ф-ции (4) не выполнено, а (3) все равно выполнено.

Д-во:

$$\left||y_1|-|y_2|\right| \le |y_1-y_2|$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = |x|\,\left||y_1|-|y_2|\right| \le |x|\,|y_1-y_2|$$

$$x\in[x_0-h,\,x_0+h] \Rightarrow \le \underbrace{(|x_0|+|h|)}_{K}|y_1-y_2|, \text{ ч.т.д.}$$

не удовл. (3)

Пример

$$\begin{cases} y'=\sqrt{y} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

$$\boxed{y_1(x)=0.}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=dx$$

$$2\sqrt{y}-2\sqrt{y_0}=x-x_0$$

$$\boxed{y_2=\frac{x^2}{4}.}$$

Нет единственности!

Д-во теор. единственост...

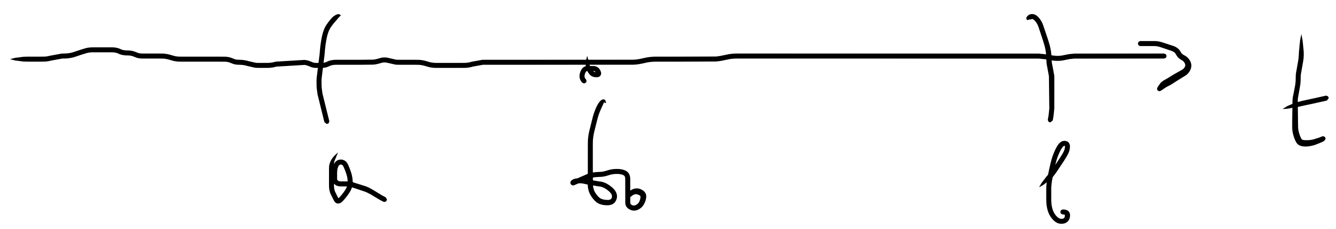
Лм (Gronwall). $u \geq 0$ $u \in C(a,b)$

$t_0 \in (a,b)$

(5). $u(t) \leq C + L\left|\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds\right|$ $(C, L \geq 0)$

(6) Тогава $u(t) \leq Ce^{L(t-t_0)}$ $\forall t \in (a,b)$

Д-во (Лм. Gronwall).



1) $t > t_0$

Замечание: 2) $t < t_0$

Сделать самостоят.

(7) $v(t) := C + L\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds.$

(8) $u(t) \le C + L\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds = v(t) \quad \forall t \in (t_0, b)$

(9) $v'(t) = L u(t).$

(10) $w(t) := v(t)\, e^{-Lt}$

$$w'(t) = v' e^{-Lt} - L v e^{-Lt} = e^{-Lt}\big(\overbrace{v'}^{Lu\ (9)} - Lv\big) = e^{-Lt}(Lu - Lv) = L e^{-Lt}(u - v) \overset{(8)}{\le} 0 \quad \forall t \in (t_0, b)$$

$w'(t) \le 0 \Rightarrow w \downarrow$ στα (t_0, b)

$$w(t) \le w(t_0) \quad \forall t \in (t_0, b)$$

$$v(t)e^{-Lt} \le v(t_0)e^{-Lt_0} = Ce^{-Lt_0}$$

$$u(t) \le v(t) \le Ce^{-L(t_0-t)}$$

2.7.9.

Αποδείξαμε: $0 \le u(t) \le L\left|\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds\right|$

(τ.ε. $C=0$) $\Rightarrow u \equiv 0$ στα (a, b)

Собственно д-во теор. единственности.

y_1, y_2 решения $(*)$ на $[x_0-h, x_0+h]$.

$$\begin{cases} y'_{1,2} = f(x, y_{1,2}(x)) \\ y_{1,2}(x_0) = y_0. \end{cases}$$

$$y_{1,2}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{1,2}(s))\,ds.$$

$$\begin{cases} y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\,ds \\ y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))\,ds. \end{cases}$$

$$\underbrace{|y_2(x) - y_1(x)|}_{u(x)} = \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s)) \big)\, ds \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))|}_{\le K |y_1(s) - y_2(s)|}\, ds \right| \le$$

$$\le K \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{|y_1(s) - y_2(s)|}_{u(s)}\, ds \right|$$

Lm. Gronwall

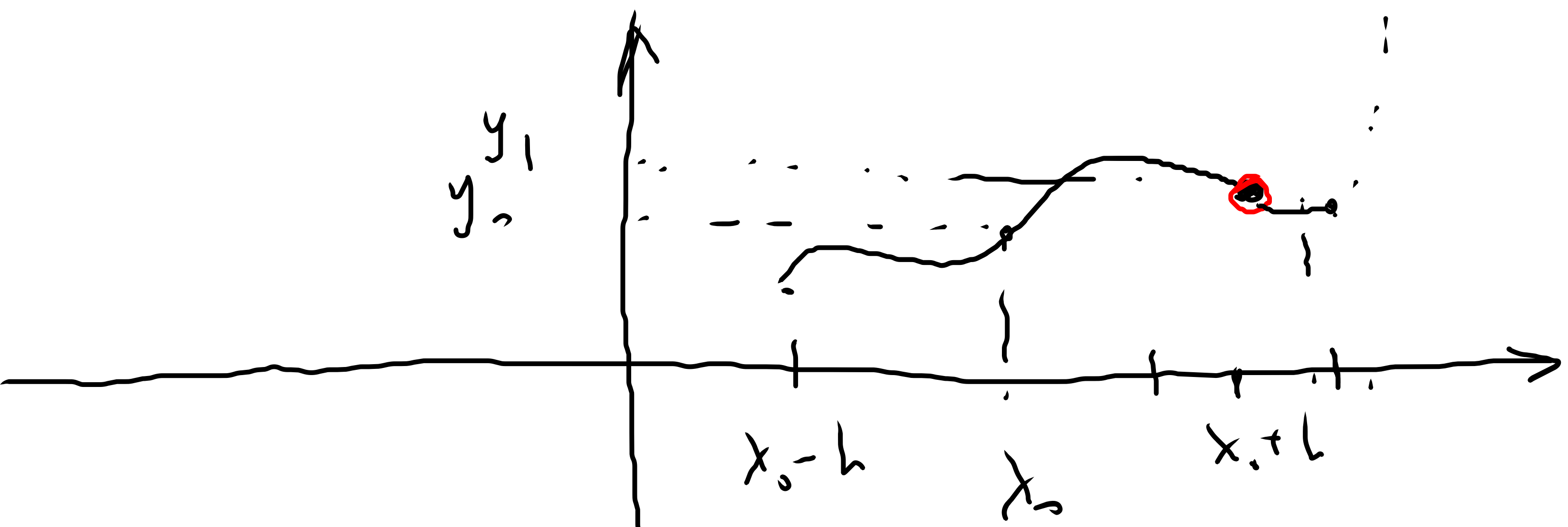
c $(C := 0,\ L := K)$

$$0 \le u(x) \le K \left| \int_{x_0}^{x} u(s)\, ds \right| \Longrightarrow u \equiv 0.$$

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x.$$

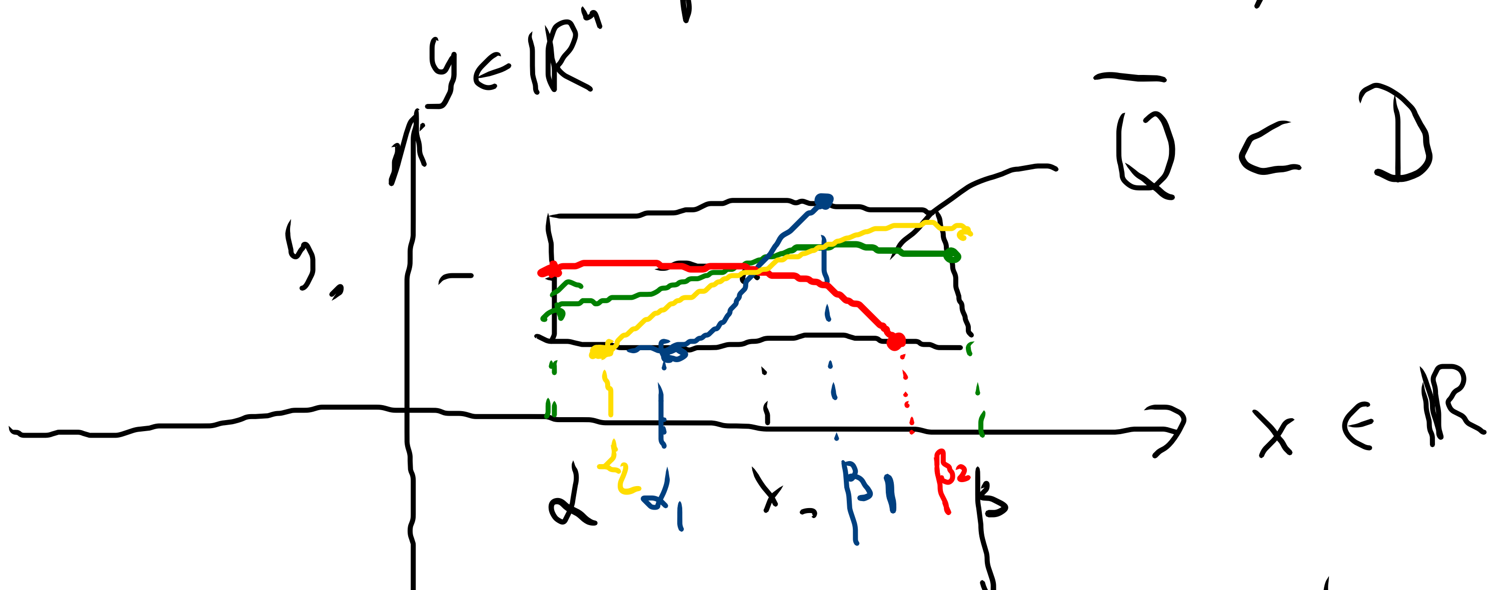
7.i.g.

Интервал существования решений



•) $\exists$ max интервал (a, b) существования решений.

-) $\overline{Q} \subset D$ - область опред. f.



Следствие.

$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = x_0 \Rightarrow$

$|y(x)| \le C \Rightarrow$ реш. опред. на $\mathbb{R}$

y
y_1
x_0
x