Числа Гурвица 2. 29.01.2021.

Хотим д-ть т. Кэли сложным способ.

Т. Кэли $T_n = n^{n-2}$

T_n - число помеч. деревьев на n вершинах

t_n - число помечен. корневых деревьев на n вершинах.

$t_n = n \cdot T_n$. $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 9$, $t_4 = 4 \cdot 16 = 64, \dots$

$$\mathbb{T}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n!} \cdot s^n$$ экспоненц. произв. ф-ция

Теор 1 $\mathbb{T}(s) = s \cdot e^{\mathbb{T}(s)}$

Как из Теор 1 получить т. Кэли

Утв 1 Уравнения $F(s) = s \cdot e^{F(s)}$ единств. решение в пр-ве формальных степенных рядов $F(s) = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots$ $F(0) = 0$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$ $\quad e^{F(s)} = 1 + (a_1 s + a_2 s^2 + \dots) + \frac{(a_1 s + a_2 s^2 + \dots)^2}{2!} + \dots$

$$a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots = s\left(1 + (a_1 s + a_2 s^2 + \dots) + \frac{(a_1 s + a_2 s^2 + \dots)^2}{2!} + \frac{(a_1 s + a_2 s^2 + \dots)^3}{3!} + \dots\right)$$

$[s^1]$: $a_1 = 1 \overset{\cdot 1!}{=} 1$

$[s^2]$: $a_2 = a_1 = 1 \overset{\cdot 2!}{=} 2$

$[s^3]$: $a_3 = a_2 + \frac{a_1^2}{2!} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \overset{\cdot 3!}{=} 9$

$[s^4]$: $a_4 = a_3 + \frac{2a_1a_2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!} = \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{6} = \frac{16}{6} \overset{\cdot 4!}{=} 64$

Обозначение

$[s^k]F(s) = a_k$

a_n выражается однозначно через $a_1 \dots a_{n-1}$. $a_1 = 1 \Rightarrow$ реш. единств.

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 9, & 64 \dots \\ \| & \| & \| & \| \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array}$$

Утв 3 (формула обращения Лагранжа)

$\varphi(s)$, $\psi(t)$ — формальные степ. ряды $\varphi(0)=0$ и пусть

$$\varphi(s) = s\cdot\psi(\varphi(s))$$

(у нас $\psi(t)=e^t$, $\varphi(s)=F(s)$), тогда

$$[s^n]\varphi(s) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t)$$

В нашем случае: $[s^n]\varphi(s) = a_n$

$$\frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\underset{1+nt+\frac{n^2t^2}{2!}+\dots}{\underset{\parallel}{e^{nt}}} = \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

Итого $t_n = n!\,a_n = n!\,\frac{n^{n-1}}{n!} = n^{n-1}$.

Док-во теор 1

$\Pi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_n s^n}{n!}$ 0, 1, 2, 9, 64, ... n^{n-1}

$\Pi(s)=s e^{\Pi(s)}$

Лес из помеченных корневых деревьев.

$\Pi(s)=t_0+t_1 s+\frac{t_2 s^2}{2!}+\dots$

$e^{\Pi(s)}=1+(t_0+t_1 s+\dots)+(t_0+t_1 s+\frac{t_2 s^2}{2!}+\dots)^2\frac{1}{2!}+\dots$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n s^n}{n!}$ f_n - лесов

Ут (Л.Д) Пусть $F(s)$ - произв. функция некоторых объектов ~~нумер~~ занумерованных эл-тами мн-ва A. Разобьем A на 2 подмн-ва A_1 и A_2

и $G(s)$ - произв. -''- занумер. эл-ми мн-ва A_1

Дано g_n, h_n даны

$H(s)$ -''- A_2

Тогда $F(s)=G(s)\cdot H(s)$

Док-во $|A|=n$ $\frac{f_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{g_k h_{n-k}}{n!}$

Следств. $\Pi(s)=s\cdot G(s)$

где $G(s)$ - произв. функция помеч. лесов на n верш.

б) $F(s) = \sum \frac{f_n}{n!} s^n$ $\{1 \ldots n\}$ разбиваю на набор подмн-в.

$F(s) = G(H(s))$, где ~~$H(s)$ - произв. ф-ция объектов с упор. эл-тами в каждом наборе~~

$H(0)=0$

~~$G(t)$ - произв. функция объектов на мн-ве наборов~~

В нашем случае $H(s) = \Pi(s)$

Блок = набор $G(t) = e^t$

Пусть k блоков $f_n = [s^n] \frac{H^k(s) \cdot \cancel{g_k}^{\,1}}{k!}$ = Дано $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k g_k}{k!} = G(t)$

$\Downarrow$

$F(s) = G(H(s))$

g_n

$g_n = [s^n] \frac{\Pi^k(s)}{k!}$