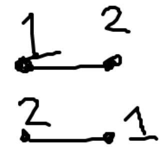
Лекция 1

Т. Кэли (о перечислении деревьев) n^{n-2}

Перечислим помеченные деревья.

Дерево с n вершинами и каждая верш. помечена меткой от 1 до n

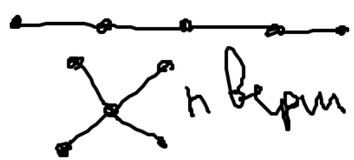
Сколькими способами можно пометить дерево?



$$\frac{n!}{\text{число элем. в группе автоморфизмов дерева}} = |\mathrm{Aut}\,D|$$

Группа авт. – подгр. в группе перестановок верш: сохр. инцидентность вершин

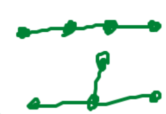
Пример



$|\mathrm{Aut}\,D| = 2$

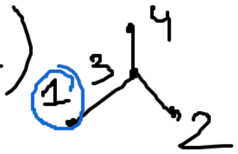
$|\mathrm{Aut}\,D| = (n-1)!$

Пример Помеч. деревья на 4 вершинах



$\frac{4!}{2}$ $\quad$ $\frac{4!}{3!}$ $\quad$ $12 + 4 = 16$

Док-во 1 (код Прюффера)   Алфавит $x_1, x_2, \dots x_n$

1) 

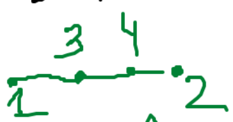
Шаг 1 x_3

1 лист с min номер, и номер верш, соед. с листом и выкидываем лист

$x_3^2 = x_3 x_3$

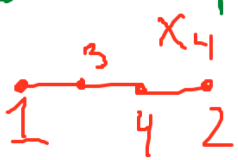
конец

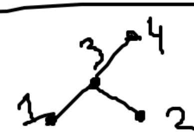
Отображение: дерево $\longmapsto$ слово длины $\underbrace{n-2}$ в алфавите $x_1 \dots x_n$

2) $\underbrace{x_3} x_4 \longmapsto$ 

степень вершины i $= k+1$, где k — количество вхождений x_i в слово

слева направо



x_3^2 

x_3

Сколько слов длины $n-2$ в алфавите из $x_1 \dots x_n$?

Ответ: n^{n-2}

Док-во:

$T_0, T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n, \ldots$

$T_n = n^{n-2}$, T_n - число помеченных деревьев на n вершинах

$T_0 = 1$

$T_1 = 1$

$T_2 = 1$

$T_0 + T_1 \cdot s + T_2 s^2 + T_3 s^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} T_k s^k$ - произв. ф-ция

формальный степенной ряд

Экспоненциальная произв. функция $\sum_{k=0}^{\infty} T_k \cdot \frac{s^k}{k!} = \mathbf{T}(s)$

$\boxed{\mathbf{T}(s) = s e^{\mathbf{T}(s)}}$

План: составить ур-е на $\mathbf{T}(s)$ и решить.

Структура на множестве - это „то что мы будем считать"

1) f_n - ~~число эл-тов в мн-ве из n эл-тов~~ Для каждого мн-ва из n эл-тов - 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} = e^s$$

2) $\frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \ldots = e^s - 1$

Операция 1

A разбивается на 2 упорядоченных подмн-ва

$A = A_1 \sqcup A_2$ (g, h) На каждом под-ве выбрали структуры g и h, тогда

$$f(A) = \sum_{A_1 \sqcup A_2 = A} g(A_1) \cdot h(A_2)$$

$$\sum g_i \frac{s^i}{i!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{s^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{s^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{s^n}{n!}$$

Пример Хотим # всех подмн-в в мн-ве из n эл-тов $= f_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{s^n}{n!} = e^s \cdot e^s = e^{2s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2s)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{s^n}{n!}$$

$$\boxed{\frac{f_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{g(k)h(n-k)}{n!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{g(k)}{k!} \cdot \frac{h(n-k)}{(n-k)!}$$

$g(k) \equiv g_k$

$h(k) \equiv h_k$

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{s^n}{n!} =$$

$$G(s)H(s) = \left(g_0 + g_1 \frac{s}{1!} + g_2 \frac{s^2}{2!} + \dots\right)\left(h_0 + h_1 s + h_2 \frac{s^2}{2!} + \dots\right)$$

$$[s^n]G(s)H(s) =$$

коэф. при s^n

Пример