Семинар 2.

Для обдумывания этих задач и подготовки к следующему семинару рекомендуется освежить в памяти первую половину семинара от 15.12.2020, а именно рассказ про квадратичные и билинейные формы.

Задача 1. Пусть $F(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = \sum a_{ij}x_ix_j$ невырожденная квадратичная форма, т.е. $\det(a_{ij}) \neq 0$. Покажите, что поверхность $X = \{x \in \mathbb{P}^3 \ , \ F(x) = 0\}$ является квадрикой по Штейнеру.

Задача 2. Пусть $F(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = \sum a_{ij}x_ix_j$ квадратичная форма. Покажите, что если поверхность $X = \{x \in \mathbb{P}^3 \ , \ F(x) = 0\}$ содержит две скрещивающиеся прямые, то X является квадрикой по Штейнеру.

Задача 3. Пусть $F(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ однородная форма степени d, тогда множество $X = \{x \in \mathbb{P}^n \ , \ F(x) =$ называется *гиперповерхностью* степени d в $\mathbb{P}^n$, а если $d = 1$, то *гиперплоскостью*. Пусть $a, b \in \mathbb{P}^n$, $a \in X$. Обозначим через l прямую ab. Тогда произвольная точка прямой l имеет вид $a + tb$, и рассмотрим ограничение формы F на прямую l: $f(t) = F(a + tb)$. Прямая l называется *касательной* к гиперповерхности X в точке a, если 0 является кратным корнем многочлена $f(t)$. Множество точек всех касательных к гиперповерхности X в точке a обозначается $\mathbb{T}_aX$ и называется *проективным касательным пространством* к X в точке a. Докажите, что $\mathbb{T}_aX$ либо является гиперплоскостью, либо совпадает со всем $\mathbb{P}^n$. (В первом случае точка a называется *простой* точкой гиперповерхности X, а во втором — *особой* точкой.)

Задача 4. Пусть X — квадрика в $\mathbb{P}^3$ из задачи 1, $a \in X$. Покажите, что точка a является простой и придумайте геометрическое описание $\mathbb{T}_aX$.

Задача 5. На семинаре 15.12.2020 было рассказано, как устроена квадрика, т.е. множество $X = \{x \in \mathbb{P}^n \ , \ F(x) = 0\}$, если квадратичная форма $F(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = \sum a_{ij}x_ix_j$ вырождена, т.е. если $\det(a_{ij}) = 0$. (Там подробно были разобраны все случаи при $n = 3$.) Докажите, что в этом случае все точки проективизации ядра формы особые, а остальные точки квадрики — простые. (Определение ядра формы было дано в семинаре от 15.12.2020: если $B(x, y)$ это билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $F(x)$, то ядро состоит из таких векторов x, что $B(x, y) = 0$ $\forall y$.)