

# Работа, потенциальные силы

## Краткий теоретический

Пусть  $\gamma: \vec{r}(t), t \in [t_0, t_1]$  — отрезок траектории частицы между моментами времени  $t_0$  и  $t_1$ .

$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  — сила, действующая на частицу.

Работа этой силы над частицей на траектории  $\gamma$ :

$$A_\gamma := \int_\gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t), \dot{\vec{r}}(t)) dt$$

↑  
скалярное произведение векторов

Сила называется потенциальной, если

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \equiv -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$$

Здесь  $U(\vec{r})$  — потенциал, порождающий силу  $\vec{F}$ .

В декартовых координатах:

$$\vec{\nabla} U(\vec{r}) = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)$$
$$(\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \text{etc.})$$

Для потенциальной силы 1-форма

$$\boxed{(\vec{F}, d\vec{r}) = -(\vec{\nabla} U, d\vec{r}) = -dU(\vec{r})} \text{ — точная}$$

При этом работа

$$A_\gamma = \int_\gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = U(\vec{r}(t)) \Big|_{t_1}^{t_0} \Leftrightarrow \boxed{A_\gamma = 0}$$

для  $\forall$  замкнутой траектории  $\odot$

Работа потенциальной силы не зависит от формы траектории  $\gamma$ , а зависит лишь от положения её концов.

Необходимое условие точности формы  $\omega$  — её замкнутость

$$\boxed{\omega = d\mathcal{F} \Rightarrow d\omega = 0}$$

Условие замкнутости формы  $(\vec{F}, d\vec{r})$  в декартовых координатах

$$\boxed{d(\vec{F}, d\vec{r}) = 0} \Leftrightarrow \boxed{\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \forall i, j},$$

здесь обозначим:  $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\} \equiv \{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$

$$\{F_x, F_y, F_z\} \equiv \{F_1, F_2, F_3\}.$$

Лемма Пуанкаре: если конфигурационное пространство механической системы односвязно, то есть любой замкнутой контур в нём стягиваем,



То замкнутость 1-формы  $\equiv$  её точность:

$$\boxed{d(\vec{F} d\vec{r}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{F}, d\vec{r}) = -dU}$$

---

## Принцип Даламбера: от ньютонова к лагран- жеву формализму.

Ньютонов формализм неудобен тем, что в уравне-  
ниях Ньютона присутствуют заранее неизвестные  
силы реакции. Чтобы разобраться с ними, изучим  
подробней их свойства.

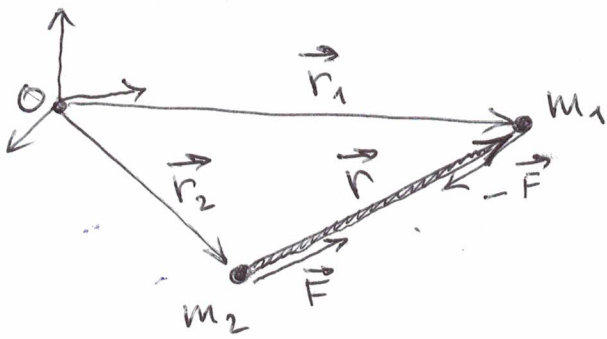
Как работают силы реакции:

### Пример 1. Силы реакции в твёрдом теле.

Типичный элемент твёрдого тела — 2 материальных  
точки  $m_1, \vec{r}_1$  и  $m_2, \vec{r}_2$ , соединённые жёстким неве-  
сомым стержнем. Стержень обеспечивает ограни-  
чение на движение точек:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \text{const}, \quad (1)$$

называемое связью. Со стороны стержня (его  
концов) на точки действуют силы реакции (см. рис.)  
направленные вдоль стержня, равные по величи-  
не и противоположные по  
направлению (объясните)



$$\vec{F}, -\vec{F} - \text{силы реакции}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Вычислим суммарную работу этих сил реакции при движении частиц. Для этого надо проинтегрировать 1-формулу:

$$(\vec{F}, d\vec{r}_2) + (-\vec{F}, d\vec{r}_1) = -(\vec{F}, d\vec{r})$$

вдоль траектории движения частиц  $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$

Заметим, что в силу условия связи:

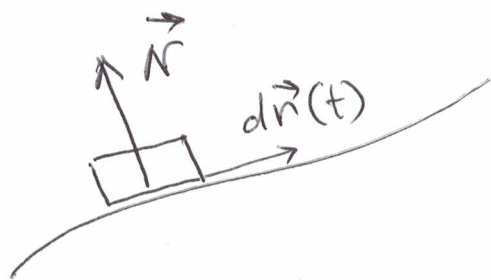
$$d(\vec{r}^2) = d((\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2) = 0, \text{ то есть}$$

$$(\vec{r}, d\vec{r}(t)) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{r}(t) \perp d\vec{r}(t)}$$

Однако  $\vec{F} \parallel \vec{r}$ , поэтому  $\vec{F} \perp d\vec{r}(t)$ , следовательно  $(\vec{F}, d\vec{r}(t)) = 0$ . Заключаем:

В твердом теле суммарная работа сил реакции стержней при любом перемещении тела равна нулю.

Пример 2: Силы реакции опор.



Рассмотрим движение тела (материальной точки) по гладкой опоре (см. рас.).

Положим, что трение отсутствует

В этом случае сила реакции опоры  $\vec{N}$  должна удовлетворять условию  $(\vec{N}, d\vec{r}(t)) = 0$



Здесь мы предположили, что тело не подпрыгивает при движении по опоре — связь удерживающая, а сама связь задается уравнением поверхности вида

$$\boxed{f(\vec{r}) = 0} \quad (2)$$

В этом случае  $d\vec{r}$  направлен по касательной к поверхности, а  $\vec{N}$  ей ортогонален, и следовательно

Сила реакции опоры  
гладкой поверхности (2)  
работы не совершает.

Однако, как мы уже проверили (см. Задание 3, №4) сила реакции гладкой опоры может совершать работу в том случае, если опора движется и уравнение связи задается условием

$$\boxed{f(\vec{r}, t) = 0} \quad (3)$$

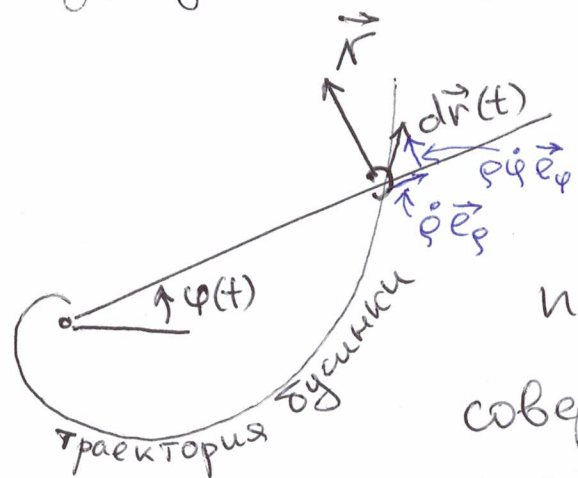
В этом случае

$$\boxed{\left( \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, d\vec{r} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0} \quad (4)$$

$$d\vec{r} \not\parallel \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, \text{ если } \frac{\partial f}{\partial t} \neq 0,$$

$$\text{и так как } \vec{N} \parallel \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, \text{ то } (\vec{N}, d\vec{r}(t)) \neq 0$$

Наглядный пример такой ситуации — движение бусинки по вращающейся стержню (см. Лекцию 1, стр 15). Вращающийся стержень — движущаяся опора, ее уравнение:



$$\arctg \frac{y}{x} = \varphi = \omega t,$$

поэтому  $\vec{N} \nparallel d\vec{r}(t)$  и сила  $\vec{N}$  совершает работу, приводящую к изменению кинетической энергии бусинки (опять см. Задачки 3, №4).

В системах со связями, явно зависящими от времени, типа (3), силы реакции движущихся опор перпендикулярны не реальным перемещениям тел  $d\vec{r}(t)$ , а, так называемым, виртуальным  $\delta\vec{r}$ .

Def: Виртуальным перемещением материальной точки в момент времени  $t=t_0$  называется любое ее возможное перемещение вдоль "замороженной" в момент  $t_0$  связи.

Например, для связи (3) виртуальным является любое перемещение, удовлетворяющее



условию

$$\left( \frac{\partial f(\vec{r}, t_0)}{\partial \vec{r}}, \delta \vec{r} \right) = 0 \quad (5)$$

Отличие такого  $\delta \vec{r}$  от  $d\vec{r}$  (см. (4)) очевидно.

Пометно также, что в разные моменты времени  $t = t_0$  виртуальные перемещения  $\delta \vec{r}$  будут разными.

Для булнки на вращающемся стержне виртуальное перемещение — это перемещение вдоль радиуса:

$$\delta \vec{r} \parallel \vec{e}_r.$$

Понятие виртуальных перемещений для характеристики сил реакции использовал Даламбер.

Принцип Даламбера. В системе с идеальными связями суммарная работа сил реакции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Пояснение: идеальными называются связи, которые не порождают сил трения, сил неупругой деформации и т.п., то есть тех сил, которые могли бы "работать" на виртуальных перемещениях.



Воспользуемся принципом Даламбера для исключения сил реакции идеальных связей из уравнений Ньютона.

Итак, пусть наша механическая система состоит из  $n$  частиц:  $\vec{r}_i, m_i, i=1, 2, \dots, n$ . Пусть на  $i$ -ю частицу в системе действуют известная нам фундаментальная сила  $\vec{F}_i$  (типа силы Кулона, силы тяжести...) и сила реакции идеальных связей  $\vec{N}_i$ . Уравнения Ньютона для системы имеют вид:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{N}_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Дополняя (6) <sup>скалярно</sup> на виртуальные (позволенные "замороженными" связями) перемещения частиц  $\delta \vec{r}_i$ , и суммируя по  $i$ , получаем

$$\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{\vec{r}}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{N}_i, \delta \vec{r}_i)$$

В силу принципа Даламбера, последнее слагаемое в правой части закруляется, и мы имеем:

$$\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{\vec{r}}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) \quad (7)$$

Уравнения (7) уже не содержат неизвестных сил реак-

числ  $N_i$ . Сколько уравнений в системе (7)?  
 Ровно столько, какова размерность пространства виртуальных перемещений  $\delta \vec{r}_i$ . Это пространство, согласно (5), совпадает с касательным пространством к поверхности связей при "замороженной" времени. Ну а размерность касательного пространства равна числу степеней свободы системы. Значит в системе (7) независимых уравнений столько, сколько степеней свободы системы, то есть достаточное количество.

Чтобы привести (7) к более удобному виду, предположим, что наша мех. система имеет  $N$  степеней свободы и допускает удобную параметризацию с помощью  $N$ , так называемых, обобщенных координат

$$\{ q_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N \}$$

Реш: термин "обобщенные координаты" — исторический. Означает, что  $q_\alpha$  отличаются от обычных декартовых координат  $\vec{r}_i$ . В частности, полярные и сферические координаты можно отнести к обобщенным.

Движение частиц системы по поверхности связей при этом задается условием

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \quad (8)$$



Здесь  $\vec{r}_i(\dots)$  в правой части — это определённые функции своих аргументов, задающие параметрически поверхность связей. Из (8) получаем для виртуальных и реальных перемещений частиц и для их скоростей соотношения:

$$\left[ \begin{aligned} \delta \vec{r}_i &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i(q_1, \dots, q_N, t)}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (\text{при } t = \text{const}) \quad (9a) \\ d\vec{r}_i &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i(q_1, \dots, q_N, t)}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i(q_1, \dots, q_N, t)}{\partial t} dt \quad (9b) \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i(q_1, \dots, q_N, t)}{\partial q_\alpha} \cdot \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i(q_1, \dots, q_N, t)}{\partial t} \quad (9c) \end{aligned} \right.$$

Здесь  $\delta q_\alpha / dq_\alpha$  — произвольный набор смещений/дифференциалов независимых друг от друга обобщённых координат.  $\dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt}$  называются обобщёнными скоростями.

Обратим внимание, что  $\dot{\vec{r}}_i$  в (9c) — есть функция от обобщённых координат  $q_\alpha$ , обобщённых скоростей  $\dot{q}_\alpha$  и времени:  $\dot{\vec{r}}_i(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t)$ , причём зависимость от  $\dot{q}_\alpha$  — линейная. Из (9c) следует:

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}} \quad (10)$$



Заметим также, что оператор взятия полной производной по времени  $-\frac{d}{dt}$  - в применении к  $\vec{r}_i(q_1, \dots, q_N, t)$  имеет вид:

$$\frac{d}{dt} = \sum_{\beta=1}^N \dot{q}_{\beta} \frac{\partial}{\partial q_{\beta}} + \frac{\partial}{\partial t},$$

и он коммутирует с оператором взятия частной производной по  $q_{\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}}$  (но не коммутирует с  $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$ ).

$$\left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right)^{\cdot} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_{\alpha}} \quad (11)$$

Теперь мы готовы преобразовать левую часть динамических уравнений (7), подставив туда выражения для  $\delta \vec{r}_i(q_{\alpha})$  и используя (10), (11):

$$\begin{aligned} m_i(\ddot{\vec{r}}_i, \delta \vec{r}_i) &= \sum_{\alpha=1}^N m_i \left( \ddot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \overset{\substack{\text{перекладываем с } \ddot{\vec{r}}_i \text{ одну} \\ \text{"\cdot"} \text{ на все скалярное} \\ \text{произведение}}}{=} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_i \left\{ \left( \dot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) - \left( \dot{\vec{r}}_i, \underbrace{\left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right)^{\cdot}}_{\substack{(10) \text{ применим } (11)}} \right) \right\} \delta q_{\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_i \left\{ \left( \dot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) - \left( \dot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) \right\} \delta q_{\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_i \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} (\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i) \right)^{\cdot} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} (\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i) \right\} \delta q_{\alpha} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \left( \frac{d}{dt} \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \right) \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} \right\} \delta q_{\alpha}.$$

Вспомнивая, что кинетическая энергия системы

$$T_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2}, \text{ мы можем записать теперь левую}$$

часть (7) как:

$$\sum_{\alpha=1}^N \delta q_{\alpha} \left( \frac{d}{dt} \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \right) T_{\text{кин}}. \quad (12a)$$

Преобразуем правую часть (7), предположив, что силы  $\vec{F}_i$ , действующие в системе, являются потенциальными, то есть существует функция потенциальной энергии  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$  (см. стр. 4 лекции 3):

$$\vec{F}_i = - \frac{\partial U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)}{\partial \vec{r}_i} \equiv - \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$$

Подставляем это в правую часть (7):

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) = - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} =$$

$$= - \sum_{\alpha=1}^N \delta q_{\alpha} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} U(\underbrace{\vec{r}_1(q_1, \dots, q_N, t), \dots, \vec{r}_n(q_1, \dots, q_N, t)}_{\text{функции связей из (8)}}, t)$$

Заметим теперь, что среди аргументов  $U$  нет обобщенных скоростей  $\dot{q}_{\alpha}$ , поэтому  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = 0$ , и



мы можем написать:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i) = \sum_{\alpha=1}^N \delta q_{\alpha} \left( \underbrace{\frac{d}{dt} \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}}}_{\text{этот оператор действует тривиально на } U} \right) U \quad (12b)$$

Глядя на (12a) и (12b) естественно определить:

Def: Для механической системы  $n$  материальных точек  $m_i, \vec{r}_i, i=1, \dots, n$ , в которой действуют потенциальные силы  $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U$ , и движение которой подчиняется идеальным связям (8), функция

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) = T_{\text{кин}} - U \quad (13)$$

называется лагранжианом системы.

Здесь кинетическая энергия  $T_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}$ , и пот. энергия  $U$  системы выражена как функции обобщенных координат и скоростей (см. (8), (9c)).

Теперь результат преобразования (12a), (12b) уравнений (7) можно сформулировать в виде теоремы:

Th: Движение механической системы с потенциальными силами и идеальными связями полностью определяется ее лагранжианом  $L(q, \dot{q}, t)$ .

Ее уравнения движения имеют вид:



$$\left( \frac{d}{dt} \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right) L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) = 0, \quad (14)$$

$$\alpha = 1, \dots, N.$$

и называются уравнениями Эйлера-Лагранжа

Док-во: уравнения (14) следуют очевидно из (7), (12a), (12b), (14), если учесть, что виртуальные перемещения  $\delta q_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ , обобщенных координат линейно независимы.