Семинар 3.

Задача 1. В проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ характеристики $\mathrm{char}\,\mathbf{k} \neq 2$ дана квадрика X с уравнением $F(x) = 0$, где $F(x) = \sum_{i,j=0}^{3} c_{ij}x_i x_j$ - квадратичная форма. Для произвольной точки $a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3) \in X$ мы получили уравнение касательного проективного пространства $\mathbb{T}_a X$ к квадрике X в точке a в виде

$$\sum_{j=0}^{3} \lambda_j x_j = 0, \qquad \text{где} \qquad \lambda_j = \sum_{j=0}^{3} a_i c_{ij}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Пусть точка a на X неособа, то есть $\mathbb{T}_a X \neq \mathbb{P}^3$. Это равносильно тому, что не все $\lambda_j,\ j = 0, 1, 2, 3$, равны нулю. Другими словами, $\mathbb{T}_a X$ есть проективная плоскость в $\mathbb{P}^3$.

1) Что можно сказать о пересечении X с $\mathbb{T}_a X$?

2) Чем является это пересечение в случае, когда X неособа, то есть когда на X нет особых точек?

Задача 2. В условиях предыдущей задачи можно ли переписать уравнение касательного пространства $\mathbb{T}_a X$ в виде

$$\sum_{i=0}^{3} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \ ? \tag{1}$$

Задача 3. Как изменится уравнение (1) при переходе от проективных координат $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ к новым координатам $(x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3)$, где $x'_i = \alpha_{ij} x_j$, а (α_{ij}) - невырожденная матрица.