# Голоморфные ф-ции нескольких свободных переменных

<u>Мотивировки и обозн-ия</u>

$f\colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{C} \qquad (z_1,\dots,z_d)\in\mathbb{C}^n \mapsto f(z_1,\dots,z_d)$

$M_n = M_n(\mathbb{C})$ $n\times n$-матрицы

$M_n^d \to M_n$

$f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad f_n\colon M_n^d \to M_n.$

$F_d = \mathbb{C}\langle \zeta_1,\dots,\zeta_d\rangle$ своб. алгебра

$\cong T(V) \qquad V=\mathbb{C}^d$

$\forall\, k\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \quad W_{d,k} = \{1,\dots,d\}^k \qquad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k) \quad 1\le \alpha_j\le d$

$W_d = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} W_{d,k} \qquad k=|\alpha|.$

$\zeta_\alpha = \zeta_{\alpha_1}\cdots\zeta_{\alpha_k}\in F_n. \qquad \{\zeta_\alpha : \alpha\in W_d\}$ – базис $F_n$.

$p\in F_n \qquad p = \sum_{\text{конеч.}} c_\alpha \zeta_\alpha \quad (c_\alpha\in\mathbb{C})$

$A$ – алгебра (ассоц. над $\mathbb{C}$, с 1) $\quad a=(a_1,\dots,a_d)$

$p(a) = \sum c_\alpha a_\alpha \qquad (a_\alpha = a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k}).$

$\forall\, n\in\mathbb{N}$ получ. $\tilde p_n\colon M_n^d \to M_n, \quad \tilde p_n(a) = p(a) = \tilde p(a).$

$\tilde p = (\tilde p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

## Св-ва $\tilde{p}$:

(1) $\tilde{p}$ сохр-ет прям. суммы:

Пусть $x \in M_n^d$, $y \in M_m^d$

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_d & 0 \\ 0 & y_d \end{pmatrix} \right) \in M_{n+m}^d.$$

Тогда $\tilde{p}(x \oplus y) = \tilde{p}(x) \oplus \tilde{p}(y)$.

(2) $\tilde{p}$ сохр-ет сопряжение:

Пусть $x \in M_n^d$, $s \in M_n$ обратимая

Обозн. $sxs^{-1} = (sx_1s^{-1}, \ldots, sx_ds^{-1}) \in M_n^d$.

Тогда $\tilde{p}(sxs^{-1}) = s\tilde{p}(x)s^{-1}$.

## Некоммут. ф-ции.

Обозн. $M^d = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} M_n^d$

$\Omega \subset M^d \quad \Omega_n = \Omega \cap M_n^d$

Опр. $\Omega$ – нс-мн-во $\iff$ $\forall x \in \Omega_n, y \in \Omega_m$ $x \oplus y \in \Omega_{n+m}$.

Опр. $\Omega$ – нс-мн-во.

$f = (f_n : \Omega_n \to M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – нс-ф-ция, если

(1) $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$ $\forall x, y \in \Omega$

(2) $f(sxs^{-1}) = sf(x)s^{-1}$ $\forall x \in \Omega_n$, $\forall$ обр-мой $s \in M_n$ т.ч. $sxs^{-1} \in \Omega_n$.

(J L Taylor, 1972)

$\mathcal{T}(\Omega) = \{$ нс-ф-ции на $\Omega\}$ алгебра.

$F_d \longrightarrow \mathcal{T}(\Omega)$, $p \longmapsto \tilde{p}$ гомом. алгебр

$\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_d \in \mathcal{T}(\Omega)$ $\quad \xi_i(z_1, \ldots, z_d) = z_i$

<u>Опр</u>. <u>dи-топ-ия</u> на $M^d$ – топ-ия дизъюнкт. объед.

<u>Факт</u>. $\Omega \subset M^d$ – dи-откр. нс-мн-во,

и $\exists n \in \mathbb{N}$ : $\Omega_n \ni 0$. Тогда

$F_d \to \mathcal{T}(\Omega)$ инъективен.

($\Longleftrightarrow \nexists$ полином. тожд-ва, к-му удовл все $M_n$).

<u>Вопр</u>. Сущ-но ли, что $\Omega_n \ni 0$ для нек-го $n$?

<u>Предл.</u> $\Omega \subset M^d$ – нс-мн-во, $f = (f_n : \Omega_n \to M_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Тогда $f$ сохр. прям суммы и сопр-ия $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow f$ <u>сохр. сплетения</u>, т.е.

$\forall x \in \Omega_m, \forall y \in \Omega_n, \forall L \in M_{n\times m}$ т.ч. $Lx = yL$,

вып-но $Lf(x) = f(y)L$.

<u>Лемма 1</u> (упр) $\begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & yL-Lx \\ 0 & x \end{pmatrix}$

$\forall x \in M_m^d, y \in M_n^d, L \in M_{n\times m}$, причем

$\begin{pmatrix} 1_n & -L \\ 0 & 1_m \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1_n & L \\ 0 & 1_m \end{pmatrix}$ обр. друг другу

Д-во предл. ($\Leftarrow$) упр

($\Rightarrow$) $yL = Lx \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f(y) & f(y)L - Lf(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) & 0 \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Нормы на $\mathbb{C}^n, M_n, M_n^d$

- $\mathbb{C}^n$ $\quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \quad \|z\| = \sqrt{\sum |z_i|^2}$
- $M_n = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \quad \|a\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|ax\|.$
- $M_n^d \hookrightarrow M_{nd} \quad (a_1, \dots, a_d) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_d \\ & 0 & \end{pmatrix}$

Лемма-упр $H = \mathbb{C}^m$ (или $\forall$ гильб. пр-во)

$a = (a_{ij}), \; a_{ij} \in \mathcal{B}(H). \quad 1 \le i, j \le n.$

$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(H^n)$. Тогда $\|a_{ij}\| \le \|a\| \; \forall i, j$.

---

$E, F$ - конечномер. нормир. пр-ва $(E = \mathbb{C}^n, F = \mathbb{C}^m)$.

$U \subset E$ откр

Опр $f: U \to F$ голоморфно $\Longleftrightarrow \forall x \in U$

$\exists$ лин. $L: E \to F$ т.ч. $\dfrac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} \to 0 \quad (h \to 0)$

$L = f'(x)$

**Опр.** $x \in U$. $f$ <u>дифф-мо в $x$ по напр-ию</u> $h \in E$

$$\Longleftrightarrow \exists \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = D_h f(x)$$

**Упр.** Если $f$ голом $\Rightarrow \forall x \in U$ $f$ дифф. в $x$ по напр. $h$ $(\forall h \in E)$, и $D_h f(x) = f'(x)h$.

**Т-ма** (Хартогс, 1906).
Если $f: U \to F$ дифф-мо в кажд. $x \in U$ по кажд. $h \in E$, то $f$ голом.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{M}^d$ – дис-откр. nc-мн-во, $f \in \mathcal{T}(\Omega)$

**Опр.** $f$ <u>голоморфна</u>, если $f_n : \Omega_n \to M_n$ голом $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{O}(\Omega) = \{$голом. nc-ф-ции на $\Omega\} \subset \mathcal{T}(\Omega)$ – подалг.

**Т-ма.** $\Omega \subset \mathbb{M}^d$ – откр. nc-мн-во, $f \in \mathcal{T}(\Omega)$ – лок. огранич. nc-ф-ция (в дис-топ-ии) $\Rightarrow f$ голом-на.

**Лемма 3.** $\Omega$ – nc-мн-во, $f \in \mathcal{T}(\Omega)$, $x \in \Omega_m$, $y \in \Omega_n$, $L \in M_{n \times m}$ т.ч. $\begin{pmatrix} y & yL - Lx \\ 0 & x \end{pmatrix} \in \Omega_{n+m}$

Тогда $f\begin{pmatrix} y & yL-Lx \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) & f(y)L-Lf(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}$.

<u>Д-во:</u>

$$f\begin{pmatrix} y & yL-Lx \\ 0 & x \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(y) & 0 \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) & f(y)L-Lf(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}$$

$\square$

<u>Д-во т-мы.</u>

(1) Непр-ть $f$.

Пусть $x \in \Omega_n$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \le 1$

$\exists\, r > 0$ т.ч. $\mathbb{B}_r(x \oplus x) \subset \Omega_{2n}$ и

$\exists\, M \geq 1$ т.ч. $\|f(y)\| \le M$ $\forall\, y \in \mathbb{B}_r(x \oplus x)$.

$$\left\| \begin{pmatrix} y & \frac{M}{\varepsilon}(y-x) \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} y-x & \frac{M}{\varepsilon}(y-x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\le \left(1 + \frac{M}{\varepsilon}\right)\|y-x\| \le \frac{2M}{\varepsilon}\|y-x\| < r, \text{ если } \|y-x\| < \frac{r\varepsilon}{2M}.$$

Зафикс $\delta > 0$ т.ч. $\delta \le \frac{r\varepsilon}{2M}$ и $\mathbb{B}_\delta(x) \subset \Omega_n$.

$$\Rightarrow \forall\, y \in \mathbb{B}_\delta(x) \quad \left\| f\begin{pmatrix} y & \frac{M}{\varepsilon}(y-x) \\ 0 & x \end{pmatrix} \right\| \le M$$

$$\| \ \ \text{"}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} f(y) & \frac{M}{\varepsilon}(f(y)-f(x)) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} \right\|$$

$\Rightarrow \|f(y)-f(x)\| \leq \varepsilon$, т.е. $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

② $f$ голом-на

$x \in \Omega_n$, $h \in M_n^d \Rightarrow \begin{pmatrix} x+th & h \\ 0 & x \end{pmatrix} \in \Omega_{2n}$,

если $|t|$ и $\|h\|$ дост. малы.

$$\begin{pmatrix} x+th & h \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+th & \frac{1}{t}((x+th)-x) \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$13 \Rightarrow f\begin{pmatrix} x+th & h \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+th) & \frac{1}{t}(f(x+th)-f(x)) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow (t \to 0)$$

$$f\begin{pmatrix} x & h \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists\, D_h f(x) \Rightarrow f$ голом-на. $\square$

<u>Сл-вие</u> (из д-ва т-мы)

В усл-иях т-мы $f\begin{pmatrix} x & h \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) & f'(x)h \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}$.

# Формула и ряд Тейлора-Тейлора

<u>Т-ма</u> (J. Taylor, Д. Калюжный-Вербовецкий, В. Винников)

$\Omega \subset \mathbb{M}^d$ – nc-мн-во, $f \in \mathcal{T}(\Omega)$

(1) $\forall\, x \in \Omega_n,\ y \in \Omega_m$ $\exists$ лин. оп-р

$\Delta f(x,y) : M^d_{n\times m} \longrightarrow M_{n\times m}$, т.ч.

$$f\begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) & (\Delta f)(x,y)(z) \\ & f(y) \end{pmatrix} \quad \left(\text{если} \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \Omega_{n+m}\right)$$

(2) Ф-ции $\Delta f(x,-)$ и $\Delta f(-,y)$ сохр-ют прям. суммы и сопряжения.

<u>Примеры.</u>

(1) $y \in \Omega_n,\ x \in \Omega_m,\ L \in M^d_{n\times m}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta f(y,x)(yL - Lx) = f(y)L - Lf(x)$

(2) $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow \Delta f(x,x) = f'(x)$.

Из (1): для $y, x \in \Omega_n$

$$\Delta f(y,x)(y-x) = f(y) - f(x)$$

$x, y \in \Omega_n$.

$$f(x) = f(y) + \Delta f(y,x)(x-y) =$$
$$= f(y) + \left(\Delta f(y,y) + \Delta^2 f(y,y,x)(x-y)\right)(x-y)$$
$$= f(y) + \Delta f(y,y)(x-y) + \Delta^2 f(y,y,x)(x-y,x-y).$$

$$L(V, L(V,W)) \cong L^{(2)}(V\times V, W)$$
(билин. оп-ры)

$$\varphi \longmapsto \Phi(x,y) = \varphi(x)(y)$$

<u>Т-ма</u> (ф-ла Тейлора-Тейлора)

$\Omega$ - $du$-откр. пс-мн-во, $f \in \mathcal{T}(\Omega)$, $y \in \Omega_n$

Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{N} \Delta^l f(\underbrace{y,\dots,y}_{l+1})(\underbrace{x-y,\dots,x-y}_{l}) +$$
$$+ \Delta^{N+1} f(y,\dots,y,x)(\underbrace{x-y,\dots,x-y}_{N+1}).$$

Здесь $\Delta^0 f(y) = f(y)$.

<u>Обозн.</u> $\Delta^l_y f = \Delta^l f(\underbrace{y,\dots,y}_{l+1})$.

**Т-ма** (ряд Тейлора-Тейлора) (K-B&B 2014)

$\Omega \subset \mathbb{M}^d$ откр, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $y \in \Omega_n$.

Тогда $\exists$ окр-ть $U \ni y$, $U \subset \Omega$, т.ч.

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Delta_y^{\ell} f(x-y, \ldots, x-y) \qquad (x \in U)$$

причем ряд сх-ся абсол-но и равном. на $U$

Более того,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{x \in U} \| \Delta_y^{\ell} f(x-y, \ldots, x-y) \| < \infty$$

При этом $\Delta_y^{\ell} f = \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(y)$.

---

Размножения полилин. оп-ров.

$V, W$ - вект. пр-ва, $T : V \to W$ - лин.

$$T_n : M_n(V) \to M_n(W), \quad T_n((v_{ij})) = (T(v_{ij}))$$

$$\begin{array}{ccc} M_n(V) & \longrightarrow & M_n(W) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ M_n \otimes V & \xrightarrow[1 \otimes T]{} & M_n \otimes W \end{array}$$

– размножение $T$.

Пусть $T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{\ell} \to W$ - $\ell$-лин. оп-р.

$T : V^{\otimes \ell} \to W$ лин.

$$(M_n\otimes V)^{\otimes \ell} \cong M_n^{\otimes \ell}\otimes V^{\otimes \ell} \xrightarrow[\mu\otimes 1]{} M_n\otimes V^{\otimes \ell} \xrightarrow[1\otimes T]{} M_n\otimes W.$$

$$\mu(a_1\otimes\ldots\otimes a_\ell)=a_1\cdots a_\ell$$

Получ. $\ell$-лин. оп-р $T_n: M_n(V)\times\cdots\times M_n(V)\to M_n(W)$.

– <u>размножение</u> $T$.

---

Пусть $y\in\Omega_s$, $\oplus^n y = y\oplus\ldots\oplus y\in\Omega_{ns}$, $x\in\Omega_{ns}$.

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\Delta^{\ell}_{\oplus^n y} f(x-\oplus^n y,\ldots,x-\oplus^n y)$$

<u>Предл</u> $\Delta^{\ell}_{\oplus^n y} f = (\Delta^{\ell}_y f)_n \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

<u>Сл-вие</u> $f(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}(\Delta^{\ell}_y f)_n(x-\oplus^n y,\ldots,x-\oplus^n y).$

$(\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall x\in U_{ns},\ y\in U_{ns}\subset\Omega_{ns}$ откр.$)$.

Пусть $y=0=(0,\ldots,0)\in\Omega_1\subset\mathbb{C}^d \qquad s=1.$

$\Delta^{\ell}_0 f:\ \mathbb{C}^d\times\ldots\times\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}$

$(\Delta^{\ell}_0 f)_n(x,\ldots,x)=?$

$x\in M_n^d\cong M_n\otimes\mathbb{C}^d \qquad x=\sum_{i=1}^{d}x_i\otimes e_i \qquad e_i=(0\ldots 010\ldots)$

$$\underbrace{x\otimes\cdots\otimes x}_{\ell} = \Big(\sum_{\alpha_1} x_{\alpha_1}\otimes e_{\alpha_1}\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\sum_{\alpha_\ell} x_{\alpha_\ell}\otimes e_{\alpha_\ell}\Big)\longmapsto$$

$$\longmapsto \sum_{\alpha\in W_{d,\ell}} x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_\ell}\otimes e_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha_\ell}\mapsto \sum_{\alpha\in W_{d,\ell}} c_\alpha x_\alpha.$$

где $c_\alpha = \Delta_0^\ell f(e_{\alpha_1},\ldots,e_{\alpha_\ell})$.

<u>**Т-ма**</u> (1) $\Omega\subset M^d$ – dи – откр. пс-мн-во, $\Omega_1\ni 0$. $f\in\mathcal{O}(\Omega)$. Тогда $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists$ окр-ть $0\in U_n\subset\Omega_n$, т.ч. $\forall x\in U_n$

$$f(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(\sum_{\alpha\in W_{d,\ell}} c_\alpha x_\alpha\Big). \qquad (c_\alpha\in\mathbb{C}) \quad (*)$$

причем ряд сх-ся абс-но и равн-но на $U_n$. более того, $\sum_{\ell=0}^{\infty}\sup_{x\in U}\Big\|\sum_{\alpha\in W_{d,\ell}} c_\alpha x_\alpha\Big\|<\infty$.

(2) Обратно: пусть $\{c_\alpha : \alpha\in W_d\}$ таковы, что

$$\varlimsup_{\ell\to\infty}\sup_{\|z_i\|\le 1}\Big\|\sum_{\alpha\in W_{d,\ell}} c_\alpha z_\alpha\Big\|^{1/\ell}<\infty.$$

Тогда $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists$ окр-ть $0\in U_n\subset M_n^d$ т.ч. ряд $(*)$ сх-ся в $U_n$ в указ. выше смысле. Если $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n\supset U$ – пс-мн-во (откр), то $f\in\mathcal{O}(U)$.

Нельзя ли: $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in W_{d,l}} \rightsquigarrow \sum_{\alpha \in W_d}$ ?

## Равномерно голом. ф-ции

<u>Обозн.</u> $y \in M_s^d$

$$\mathbb{B}_\varepsilon^{nc}(y) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{B}_\varepsilon(\oplus^n y)$$ – <u>nc-шар</u> (с центром в $y$ рад. $\varepsilon$).

<u>Опр.</u> <u>Равномерная топ-ия</u> на $M^d$ – топ-ия, базу к-рой обр-ют всевозм. nc-шары.

<u>Замеч.</u> Она нехаусд. и слабее (грубее), чем $du$ – топ-ия.

<u>Опр.</u> $\Omega \subset M^d$ равном. откр nc-мн-во.

$f \in \mathcal{T}(\Omega)$ <u>равном-но голом-на</u> $\iff$ она равном. лок. огр-на

Равном. голом. $\Rightarrow$ голом.

<u>Обозн.</u> $\mathcal{O}^{unif}(\Omega) = \{ f \in \mathcal{T}(\Omega) : f \text{ равн. гол.} \} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ – подалгебра.

Т-ма. (1) $\Omega \subset M^d$ равн. отф пс-мн-во, $\Omega_1 \ni 0$. $f \in \mathcal{O}^{unif}(\Omega)$. Тогда $\exists$ равн. откр. $\underbrace{U \ni 0}_{\text{пс-мн-во}}$, $U \subset \Omega$, т.ч. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in U_n$

$$f(x) = \sum_{\alpha \in W_d} c_\alpha x_\alpha \quad (c_\alpha \in \mathbb{C}) \qquad (**)$$

причём ряд сх-ся абсол-но и равном. на $U$.

Более того: $\displaystyle\sum_{\alpha \in W_d} |c_\alpha| \sup_{x \in U} \|x_\alpha\| < \infty$.

(2) Пусть $\{c_\alpha : \alpha \in W_d\}$ таковы, что для нек-го $r > 0$ $\displaystyle\sup_\alpha |c_\alpha| r^{|\alpha|} < \infty$

Тогда $\exists$ равном. откр. пс-мн-во $U \ni 0$, т.ч. ряд (**) сх-ся в указ. выше смысле к $f \in \mathcal{O}^{unif}(U)$.

---

Обозн. $\mathbb{C}\langle\langle \zeta_1, \ldots, \zeta_d \rangle\rangle$ – алг. форм. своб. степ. рядов вида $\displaystyle\sum_{\alpha \in W_d} c_\alpha \zeta_\alpha$ $\left( \cong \varprojlim_k F_d / I^k, \text{ где } I = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d) \right)$.

$$\mathbb{C}\langle \zeta_1, \ldots, \zeta_d \rangle \hookrightarrow \mathcal{O}^{unif}(\Omega) \subset \mathcal{O}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{C}\langle\langle \zeta_1, \ldots, \zeta_d \rangle\rangle$$

# Алгебры голоморфных функций на квантовом полидиске и квант. шаре

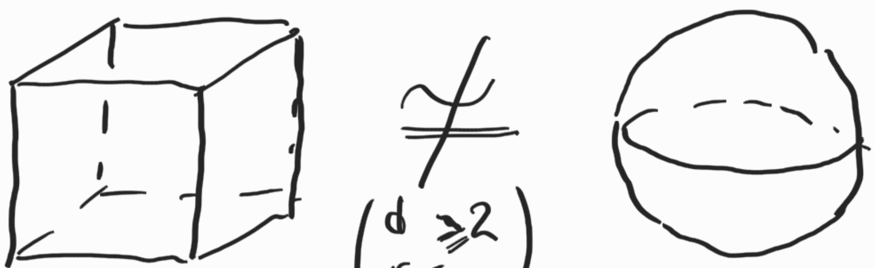
Обозн-ия.

$U \subset \mathbb{C}^d$ откр $\quad \mathcal{O}(U) = \{$голом ф-ции $U \to \mathbb{C}\}$

$\mathbb{D}_r^d = \{ z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d : \max\limits_{1 \le i \le d} |z_i| < r \}$ —

— полидиск радиуса $r$ $\qquad r \in (0, +\infty]$

$\mathbb{B}_r^d = \{ z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d : \sum |z_i|^2 < r^2 \}$ — шар



$\begin{pmatrix} d \geq 2 \\ r < \infty \end{pmatrix}$

Пуанкаре 1907

Экв. ф-ка: $\mathcal{O}(\mathbb{D}_r^d) \not\cong \mathcal{O}(\mathbb{B}_r^d)$

Цель: придумать квантованные аналоги этих алг.

Выяснить, изом-ны ли они.

Алгебраический прототип:

алгебра многочленов на квантовом $\mathbb{C}^d$.

$q \in \mathbb{C}$
$q \neq 0$

$$\mathcal{O}_q^{pol}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_d \mid x_i x_j = q x_j x_i \ (i<j) \rangle$$

$$= \mathbb{C}\langle \zeta_1, \ldots, \zeta_d \rangle / (\zeta_i \zeta_j - q \zeta_j \zeta_i \ (i<j))$$

При $q=1$: $\mathcal{O}_1^{pol}(\mathbb{C}^d) = \mathcal{O}^{pol}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$

$\forall q$: $\{x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d} = x^k\}_{k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}}$ – базис $\mathcal{O}_q^{pol}(\mathbb{C}^d)$

## Оболочки Аренса-Майкла

Опр. $A$ – алгебра (ассоц, над $\mathbb{C}$, с 1)

Полунорма $\|\cdot\|$ на $A$ субмультипликативна, если $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ $(a, b \in A)$

Опр. Алгебра Аренса-Майкла – полная топологич. алгебра, топ-ия на к-рой порожд-ся сем-вом субмульт. полунорм.

Расшифровка опр:

$E$ – вект. пр; $P = \{\|\cdot\|_i : i \in I\}$ – сем-во полунорм

$U_{i,\varepsilon}(x) = \{y \in E : \|y - x\|_i < \varepsilon\}$ $\quad i \in I$

Топ. на $E$, пор-ная $P$, – это самая слаб. топ-ия на $E$, в к-рой открыты все $U_{i,\varepsilon}(x)$ $\quad \tau(P)$

$(E, \tau(P))$ – лок. выпуклое топ. вект. пр-во.

Посл-ть $(x_\alpha)$ в $E$ фунд-на $\Longleftrightarrow$ она фунд. по $\|\ \|_i$ $\forall i$.
(или направленность)

$E$ полно $\Longleftrightarrow$ $E$ хаусд, и кажд. фундам напр-ть в $E$ сходится.

Пр-во Фреше — полное метриз. лок. вып. пр-во

Примеры алгебр Аренса-Майкла:

банаховы алг; $C(X)$; $C^\infty(U)$ $(U \subset \mathbb{R}^d)$;
$C^\infty(M)$; $\mathcal{O}(U)$ $(U \subset \mathbb{C}^d)$; $\mathcal{O}(M)$;
$\mathcal{O}(\Omega)$ ($\Omega \subset M^d$ — откр. пс-мн-во):

$$\mathcal{O}(\Omega) \subset \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}(\Omega_n, M_n) \ ; \ \mathcal{O}^{unif}(\Omega) - ?$$

Опр. $A$ — алгебра. Её оболочка Аренса-Майкла — это $\widehat{A}$ = пополн-ие $A$ по сем-ву всех субмульт. полунорм на $A$. (J. L. Taylor)

$$\mathrm{Hom}_{Alg}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{Top.Alg}(\widehat{A}, B)$$

($A$ - алг, $B$ - алг А-М)

Примеры

1. (Taylor) $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d] \Rightarrow \widehat{A} \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$

2. $V$ — афф. алг мн-вие. $V \subset \mathbb{C}^N$

$$A = \mathcal{O}^{pol}(V) = \{ f|_V : f \in \mathcal{O}^{pol}(\mathbb{C}^N) \}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} \cong \mathcal{O}(V)$$

③ (Taylor 1972) $A = F_d = \mathbb{C}\langle \zeta_1, \dots, \zeta_d \rangle \Rightarrow$

$$\hat{A} = \mathcal{F}_d = \mathcal{F}(\mathbb{C}^d) =$$
$$= \{ f = \sum_{\alpha \in W_d} c_\alpha \zeta_\alpha : \|f\|_\rho = \sum |c_\alpha| \rho^{|\alpha|} < \infty \ \forall \rho > 0 \}.$$

– алг. <u>своб. степ. рядов</u> на $\mathbb{C}^d$.

<u>Предл</u> $\mathcal{F}(\mathbb{C}^d) = \mathcal{O}^{unif}(M^d)$.

<u>Сл-вие</u>. $\mathcal{O}^{unif}(M^d) \subsetneq \mathcal{O}(M^d)$ (<u>D. Luminet</u> 1986)

<u>Д-во</u>: На $\mathcal{O}^{unif}(M^d)$ есть непр. нормы, а на $\mathcal{O}(M^d)$ – нет $\Rightarrow$ вл-ие $\mathcal{O}^{unif}(M^d) \hookrightarrow \mathcal{O}(M^d)$ – не топол. изоморфизм $\Rightarrow$ не биекция (по т. Банаха). $\square$

<u>Прим</u> (D. Luminet)

Станд. кососимм. мн-н $s_k \in \mathbb{C}\langle \zeta_1, \dots, \zeta_k \rangle$

$$s_k = \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sign}(\sigma) \zeta_{\sigma(1)} \cdots \zeta_{\sigma(k)}$$

$f_n : M_n^2 \to M_n$, $\quad f_n(x,y) = \sum_{k=2}^{\infty} s_k(x, xy, x^2y, \dots, x^{k-1}y)$.

$f = (f_n) \in \mathcal{O}(M^2)$; но $f \notin \mathcal{O}^{unif}(M^2)$

<u>Опр.</u> Алгебра <u>голом. ф-ций на квантовом $\mathbb{C}^d$</u> — это

$$\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^d) = \overline{\mathcal{O}_q^{pol}(\mathbb{C}^d)}.$$

$$\mathcal{O}_1(\mathbb{C}^d) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^d).$$

<u>Обозн-ия</u> $\omega_q : \mathbb{Z}_{\geq 0}^d \to (0, +\infty)$, $\omega_q(k) = \begin{cases} |q|^{\sum_{i<j} k_i k_j} & \text{при } |q|<1 \\ 1 & \text{при } |q| \geq 1 \end{cases}$.

<u>Предл.</u> $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^d) = \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d} c_k x^k : \|f\|_\rho = \sum |c_k| \omega_q(k) \rho^{|k|} < \infty \ \forall \rho > 0 \right\}$.

$x^k = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$

$x_i x_j = q x_j x_i \ (i<j)$

<u>Опр.</u> Алгебра <u>голом. ф-ций на квантовом</u> $\mathbb{D}_r^d$ — это

$\mathcal{O}_q(\mathbb{D}_r^d) = \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d} c_k x^k : \|f\|_\rho = \sum |c_k| \omega_q(k) \rho^{|k|} < \infty \ \forall \rho \in (0, r) \right\}$.

<u>Упр.</u> $\mathcal{O}_1(\mathbb{D}_r^d) \cong \mathcal{O}(\mathbb{D}_r^d)$.

<u>Опр</u> (Taylor). Алг. <u>своб. степ. рядов</u> на $\mathbb{D}_r^d$ — это

$\mathcal{F}(\mathbb{D}_r^d) = \left\{ f = \sum_{\alpha \in W_d} c_\alpha \zeta_\alpha : \|f\|_\rho = \sum |c_\alpha| \rho^{|\alpha|} < \infty \ \forall \rho \in (0, r) \right\}$

## Свободное произвед-ие Аренса-Майкла

<u>Опр.</u> $A, B$ – алг. А-М.

Их <u>своб. пр-ие А-М</u> – их копроизвед-ие в катег алгебр А-М.

Т.е. это тройка $(A \hat{*} B, i_A, i_B)$ т.ч.

$$\begin{tikzcd} & A \hat{*} B \arrow[d, dashed, "h"] & \\ A \arrow[ur, "i_A"] \arrow[r, "f"'] & C & B \arrow[ul, "i_B"'] \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

$\forall (C, f, g)$

$\exists !\, h$ т.ч. диагр. комм.

$$\operatorname{Hom}_{AM}(A \hat{*} B, C) \cong$$
$$\cong \operatorname{Hom}_{AM}(A, C) \times \operatorname{Hom}_{AM}(B, C).$$

(J. Cuntz 1997)

<u>Прим.</u> $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{d_1}) \hat{*} \mathcal{F}(\mathbb{C}^{d_2}) \cong \mathcal{F}(\mathbb{C}^{d_1+d_2})$ (упр)

В част-ти:

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^d) \cong \underbrace{\mathcal{O}(\mathbb{C}) \hat{*} \dots \hat{*} \mathcal{O}(\mathbb{C})}_{d} \quad (\text{т.к. } \mathcal{F}(\mathbb{C}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}))$$

<u>Опр</u> <u>Универс. алг. своб. степ. рядов на</u> $\mathbb{D}_r^d$ – это

$$\mathcal{F}^{univ}(\mathbb{D}_r^d) = \underbrace{\mathcal{O}(\mathbb{D}_r^1) \hat{*} \dots \hat{*} \mathcal{O}(\mathbb{D}_r^1)}_{d}$$

$$\mathcal{F}^{univ}(\mathbb{C}^d) = \mathcal{F}(\mathbb{C}^d) = \mathcal{O}^{unif}(M^d)$$

$$\mathcal{F}^{univ}(\mathbb{D}_r^d) \subsetneq \mathcal{F}(\mathbb{D}_r^d) \quad (r < \infty)$$

Обозн. $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in W_{d,k}$.

$s(\alpha)=\#\{i\in\{1,\dots,k-1\} : \alpha_i\neq\alpha_{i+1}\}$

Предл.

$$\mathcal{F}^{univ}(\mathbb{D}_r^d)\cong\Big\{f=\sum_{\alpha\in W_d} c_\alpha\zeta_\alpha : \|f\|_{\rho,\tau}=\sum|c_\alpha|\rho^{|\alpha|}\tau^{s(\alpha)+1}<\infty \quad \forall\rho\in(0,r),\ \forall\tau\geq 1\Big\}$$

Гип. $\exists$ равн. откр. nc-мн-ва $\mathbb{F}\mathbb{D}_r^d\subsetneq\mathbb{F}^{univ}\mathbb{D}_r^d$

т.ч. $(\mathbb{F}\mathbb{D}_r^d)_1=(\mathbb{F}^{univ}\mathbb{D}_r^d)_1=\mathbb{D}_r^d$ и т.ч.

$\mathcal{F}(\mathbb{D}_r^d)=\mathcal{O}^{unif}(\mathbb{F}\mathbb{D}_r^d)$, $\mathcal{F}^{univ}(\mathbb{D}_r^d)=\mathcal{O}^{unif}(\mathbb{F}^{univ}\mathbb{D}_r^d)$.

Т-ма. $\mathcal{O}_q(\mathbb{D}_r^d)\cong\mathcal{F}(\mathbb{D}_r^d)\big/\overline{(\zeta_i\zeta_j-q\zeta_j\zeta_i,\ i<j)}$

Аналог. для $\mathcal{F}^{univ}(\mathbb{D}_r^d)$

$$\mathcal{O}_q(\mathbb{B}_r^d)=\Big\{f=\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^d} c_k x^k : \ \dots\dots\dots\Big\}$$

$\mathcal{O}_1(\mathbb{B}_r^d)\cong\mathcal{O}(\mathbb{B}_r^d)$ (Л.А. Айзенберг, Б.С. Митягин 1961)

$\mathcal{F}(\mathbb{B}_r^d)$ алг. своб. степ. рядов на $\mathbb{B}_r^d$.

(G. Popescu 2006)

<u>Т-ма</u> $\mathcal{F}(\mathbb{B}_r^d)/\overline{(\zeta_i\zeta_j - q\zeta_j\zeta_i,\ i<j)} \cong \mathcal{O}_q(\mathbb{B}_r^d)$

<u>Т-ма.</u> (1) Если $|q| \neq 1$, то

$$\mathcal{O}_q(\mathbb{D}_r^d) = \mathcal{O}_q(\mathbb{B}_r^d)$$

(2) Если $|q| = 1$, $r < \infty$, $d \geq 2$, то

$$\mathcal{O}_q(\mathbb{D}_r^d) \not\cong \mathcal{O}_q(\mathbb{B}_r^d).$$