Лекция 4. 12.02.2021.

В прошлый раз: определили связн. и несвязн. числа Гурвица $h_{m,\mu}$ $h^\circ_{m,\mu}$ m - число транспозиций

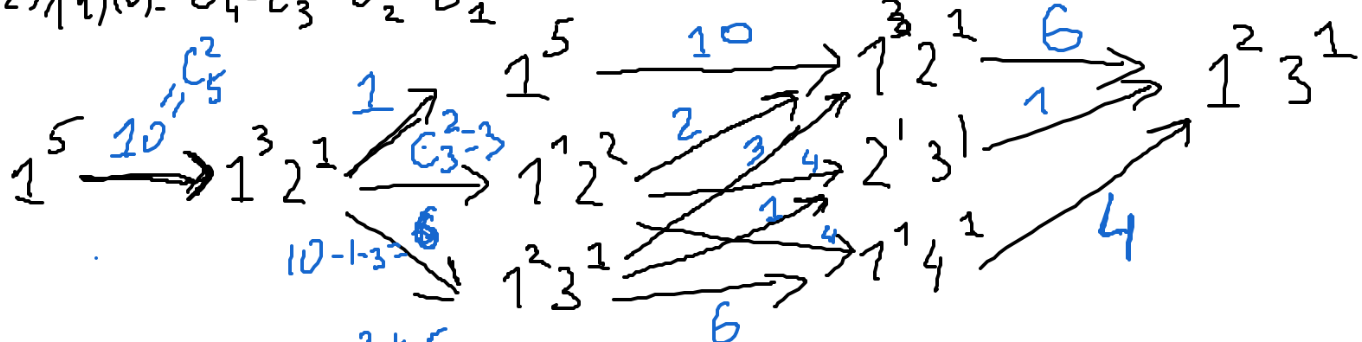
$\mu = 1^{n_1}2^{n_2}\dots$ - циклический тип результирующей перестановки.

$$h^\circ_{n-1,n^1} = n^{n-3}$$

Вычисление чисел Гурвица с помощью ориент. графов.

$h^\circ_{4,1^2 3^1}$ в S_5 цикл длины 3 как произв. 4 транспозиций

$(123)(4)(5) = \tau_4 \circ \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1$



$(12)(\overline{34})$ 345

$(12)(23) = (123)$

$(12)(34)(5)$

(15)

(25)

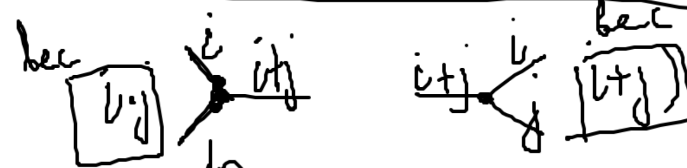
$(1)(2)(345)$

$(1)(2345)$

C_4^2

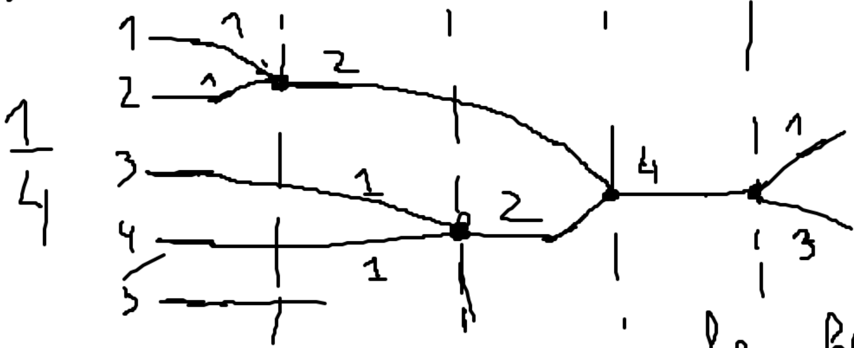
"Тропическое" вычисление чисел Гурвица

$h^{\circ}_{4;\,1^2 3^1}$ $\qquad \tau_4 \circ \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1$



Johnson

Перечисляем графы



(1234)

$C_4^2 = 6$

веса вершин

~~(12)(34)5~~

вес графа $= \frac{1}{4}\, 2 \cdot 2 \cdot 4$

$\frac{1}{4}$ автоморфизмы графа

Преимущество: легко получать связные числа! Надо брать только связные графы.

Производящая функция чисел Гурвица

$h^{\circ}_{m,\mu}$, $h_{m,\mu}$ $\qquad$ $\cancel{m,n,k}$

$\mu = 1^{n_1} 2^{n_2} \ldots$ $\quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k)$ $\quad \mu_1 + \ldots + \mu_k = n$, все перестановки из S_n

$$H^{\circ}(u; p_1, p_2, p_3, \ldots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu = \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \ldots} h^{\circ}_{m,\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} p_{\mu_3} \ldots \cdot \frac{u^m}{m!} =$$

$$h^{\circ}_{4, 1^2 3^1} = \left[\frac{u^4}{4!} p_1^2 p_3\right] H^{\circ}(u; p_1, p_2, p_3 \ldots)$$

$5 = \underset{\mu_1}{3} + \underset{\mu_2}{1} + \underset{\mu_3}{1}$ $\qquad$ коэффициент при таком мономе

$m = 0 \Rightarrow$ для каждого n тожд. перест. распл. 1 способом

$$h^{\circ}_{0, 1^n} = \frac{1}{n!}$$

$$= \Big(\overbrace{1 + p_1 + \frac{p_1^2}{2!} + \frac{p_1^3}{3!} + \ldots}^{m=0}\Big)^{\circ} + \sum_{\mu = \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots} h^{\circ}_{1,\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \ldots \frac{u^1}{1!} + \ldots$$

— разложение по степеням u.

$$H(u;p_1,p_2\ldots)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=\mu_1\geq\mu_2\geq\ldots} h_{m,\mu}\, p_{\mu_1}p_{\mu_2}\ldots\frac{u^m}{m!}=\underbrace{p_1}_{m=0}+\underbrace{\frac{1}{2}p_2\frac{u^1}{1!}}_{m=1}+\underbrace{\ldots}_{m=2}+\ldots$$

т.к. $h_{0,1}=\frac{1}{1!}$, $h_{0,1^n}=0$

(12) $p_1^2\ p_2$

$$H^0(u;p_1,p_2\ldots)=\exp(H(u;p_1,p_2,\ldots))$$

Обозначим: $\left[\frac{u^m}{m!}\right]H^0(u;p_1,p_2\ldots)=H^0_m(p_1,p_2,\ldots)$

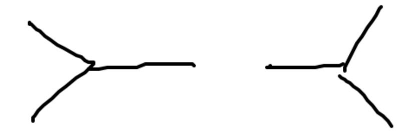
$$\left[\frac{u^m}{m!}\right]H(u;p_1p_2\ldots)=H_m(p_1,p_2\ldots)$$

$$H^0_m(p_1,p_2,\ldots)=\exp(H_m(p_1,p_2\ldots))$$

$m=0$ $\quad 1+p_1+\frac{p_1^2}{2!}+\ldots=\exp(p_1)$

Уравнение транспозиции

· это ур-е cut&join



Теорема (Гулден-Джексон) $H^\circ = H^\circ(u, p_1, p_2, \dots)$

$$\frac{\partial H^\circ}{\partial u} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geq 1}}\left((i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij\, p_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\right)}_{W} H^\circ$$

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}\left(2p_1^2\frac{\partial}{\partial p_2} + p_2\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\right)}_{n=2} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(2\cdot 3\cdot p_1 p_2\frac{\partial}{\partial p_3} + 2\cdot 1\cdot 2\, p_3\frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}\right)}_{n=3} + \dots$$

$$WH^\circ = We^{p_1} + W\frac{u^1}{1!}H^\circ_1(p_1,p_2)$$

$$H^\circ(u, p_1, p_2, \dots) = e^{p_1} + \frac{u^1}{1!}H^\circ_1(p_1, p_2, \dots) + \frac{u^2}{2!}H^\circ_2(p_1, p_2, \dots) \quad \checkmark$$

$$[u^0]\frac{\partial H^\circ}{\partial u} = H^\circ_1(p_1, p_2, \dots) = We^{p_1} = \frac{1}{2}p_2\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}e^{p_1} = \frac{1}{2}p_2 e^{p_1}$$