Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: комплексная структура на кривой

До сих пор мы имели дело только с плоскими алгебраическими кривыми. Общая *риманова поверхность* (или *комплексная кривая*) это двумерная ориентируемая поверхность с комплексной структурой на ней. *Комплексной структурой* на двумерной поверхности называется ее покрытие открытыми дисками вместе с гомеоморфизмами этих дисков на единичный круг на комплексной прямой $\{(U_i, \varphi_i : U_i \to D)\}$, обладающее следующим свойством: если два диска U_i и U_j пересекаются, то композиция $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, определенная на прообразе относительно φ_i пересечения этих дисков, является голоморфным (т.е. комплексно аналитическим) отображением.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: комплексная структура на кривой

Для гладкой плоской алгебраической кривой комплексная структура определяется в согласии с теоремой о неявной функции. В каждой точке кривой $F(x, y, z) = 0$ какая либо из частных производных многочлена F отлична от 0, а значит соответствующая переменная служит локальным параметром в окрестности этой точки. Таким образом мы получаем покрытие плоской кривой подходящими окрестностями ее точек.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: комплексная структура на кривой

Для гладкой плоской алгебраической кривой комплексная структура определяется в согласии с теоремой о неявной функции. В каждой точке кривой $F(x, y, z) = 0$ какая либо из частных производных многочлена F отлична от 0, а значит соответствующая переменная служит локальным параметром в окрестности этой точки. Таким образом мы получаем покрытие плоской кривой подходящими окрестностями ее точек.

Аналогично вводится комплексная структура на гладкой алгебраической кривой в проективном пространстве произвольной размерности. Пусть $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — проективные координаты в $\mathbb{C}P^n$, Подмножество $C \subset \mathbb{C}P^n$ называется *гладкой алгебраической кривой*, если у любой точки множества C существует окрестность, в которой это подмножество задается набором однородных полиномиальных уравнений $F_1(x_0, \dots, x_n) = 0, \dots, F_{n-1}(x_0, \dots, x_n) = 0$, причем ранг матрицы Якоби этого набора равен $n - 1$.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: голоморфные отображения кривых

Голоморфное отображение кривых $f : C_1 \to C_2$ это отображение, уважающее комплексную структуру. Если точка $A \in C_1$ покрыта окрестностью $(U, \varphi : U \to D)$, а точка $B = f(A \in C_2)$ покрыта окрестностью $(V, \psi : V \to D)$, то отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ должно быть комплексно аналитическим там, где оно определено.
С топологической точки зрения голоморфное отображение комплексных кривых является разветвленным накрытием.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: голоморфные отображения кривых

Голоморфное отображение кривых $f : C_1 \to C_2$ это отображение, уважающее комплексную структуру. Если точка $A \in C_1$ покрыта окрестностью $(U, \varphi : U \to D)$, а точка $B = f(A \in C_2)$ покрыта окрестностью $(V, \psi : V \to D)$, то отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ должно быть комплексно аналитическим там, где оно определено.
С топологической точки зрения голоморфное отображение комплексных кривых является разветвленным накрытием.

Две комплексные кривые C_1, C_2 называются *биголоморфными*, если существует голоморфное взаимно-однозначное отображение $f : C_1 \to C_2$, обратное к которому тоже голоморфно.

Theorem

Всякая гладкая компактная комплексная кривая биголоморфна некоторой алгебраической кривой в каком-то проективном пространстве.

Theorem (Принцип максимума для голоморфных отображений)

Пусть $f : C_1 \to C_2$ — непостоянное голоморфное отображение компактной комплексной кривой C_1 в связную компактную комплексную кривую C_2. Тогда его образ совпадает со всей кривой C_2.

Действительно, образ отображения f компактен. Если он не совпадает с кривой C_2, то дополнение к нему открыто. Возьмем точку на границе образа. Любая ее окрестность пересекает дополнение к образу. В то же время, на кривой C_1 существует точка, переходящая в выбранную точку границы. Маленький диск вокруг этой точки переходит в открытое множество в C_2, которое поэтому пересекается с дополнением к образу отображения f, и мы приходим к противоречию.

Воспользуемся голоморфными отображениями для вычисления рода гладких плоских алгебраических кривых.
Начнем с вычисления рода *какой-нибудь* гладкой плоской кривой данной степени d.
Одной из наиболее популярных кривых является *кривая Ферма*, задаваемая уравнением $F(x, y, z) = x^d + y^d + z^d = 0$. Эта кривая гладкая. Действительно, все частные производные многочлена F обращаются в 0 только, если $x = y = z = 0$, а такой точки на проективной плоскости нет.

Воспользуемся голоморфными отображениями для вычисления рода гладких плоских алгебраических кривых.
Начнем с вычисления рода *какой-нибудь* гладкой плоской кривой данной степени d.
Одной из наиболее популярных кривых является *кривая Ферма*, задаваемая уравнением $F(x, y, z) = x^d + y^d + z^d = 0$. Эта кривая гладкая. Действительно, все частные производные многочлена F обращаются в 0 только, если $x = y = z = 0$, а такой точки на проективной плоскости нет. Рассмотрим отображение φ этой кривой в проективную прямую $\mathbb{C}P^1$, заданное отображением проколотой в точке $(0 : 0 : 1)$ проективной плоскости $(x : y : z) \mapsto (x : y)$. Отметим, что точка прокола не лежит на кривой Ферма.

Критическими точками проекции φ являются те точки кривой Ферма, в которых $z = 0$. Их d штук. Это точки $(1 : \varepsilon_d^i : 0)$, где ε_d — примитивный корень из -1 степени d, а $i = 0, 1, \dots, d-1$. Такая критическая точка при отображении φ переходит в критическое значение $(1 : \varepsilon_d^i)$. У каждого такого критического значения один прообраз; все остальные точки проективной прямой имеют ровно d прообразов. По теореме Римана–Гурвица эйлерова характеристика накрывающей кривой равна

$$\chi = d \cdot (2 - d) + d = d \cdot (3 - d).$$

Поэтому ее род равен

$$\frac{2 - \chi}{2} = \frac{2 - d(3 - d)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для *общей кривой* степени d. Без ограничения общности можно считать, что кривая не проходит через точку $(0:0:1)$. Проекция вдоль оси z определяет голоморфное отображение кривой в проективную прямую, являющееся разветвленным накрытием сферы степени d. Критические точки этого отображения — это решения системы уравнений $F=0, \partial F/\partial z=0$, т.е. точки пересечения кривой степени d и кривой степени $d-1$. В общем положении эти две кривые имеют $d(d-1)$ точек трансверсального пересечения, и каждая из этих точек является простой точкой ветвления разветвленного накрытия. Поэтому эйлерова характеристика накрывающей поверхности равна

$$\chi = d\cdot(2-d(d-1))+d(d-1)^2 = d(d-3),$$

как и в случае кривой Ферма. Тем самым, справедлива

Theorem

Род гладкой плоской кривой степени d равен $g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

В частности, род гладкой плоской кривой не может принимать других значений кроме $0, 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$.

Вот еще одно доказательство этой теоремы. Пространство плоских кривых степени d это проективное пространство. Особые кривые задаются такими многочленами F, что существуют точки $(x:y:z)$, в которых $F=0, \partial F/\partial x=0, \partial F/\partial y=0, \partial F/\partial z=0$. Из этой системы уравнений первое можно исключить благодаря формуле Эйлера, а из остальных трех ислючить поочередно z, y и x. Останется одно полиномиальное уравнение от коэффициентов многочлена F, которое выделяет в пространстве многочленов степени d гиперповерхность уравнений особых кривых. Дополнение к этой гиперповерхности связно и состоит из гладких кривых. Поскольку род кривой — непрерывная функция ее коэффициентов, он одинаков для всех гладких кривых. Поэтому его достаточно вычислить у одной кривой.

Вот еще одна гладкая плоская кривая степени d, род которой просто вычисляется. Рассмотрим аффинную кривую $\ell_1 \cdot \dots \cdot \ell_d = \varepsilon$, где линейные многочлены $\ell_1, \dots, \ell_d$ задают набор прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку. При малых ненулевых значениях ε это гладкая кривая. При $\varepsilon = 0$ это особая кривая, представляющая собой объединение d проективных прямых (двумерных сфер), любые две из которых пересекаются трансверсально по одной точке. Добавляем поочередно по одной прямой и сглаживаем точки пересечения. Шаг индукции состоит в доказательнстве того, что добавление прямой, пересекающей гладкую кривую в $d-1$ точке, с последующим сглаживанием в окрестности каждой точки пересечения, увеличивает род гладкой кривой на $d-2$. Поэтому род сглаженной кривой будет равен

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (d-2) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Из формулы для рода гладкой плоской кривой становится ясно, почему нодальная кривая степени d не может иметь больше, чем$(d-1)(d-2)/2$ точек трансверсального самопересечения. Действительно, каждая такая точка понижает род нормализующей кривой на 1.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: касательные к гладкой плоской кривой

Рассуждение, позволяющее вычислить род гладкой плоской кривой данной степени d, позволяет подсчитать и число касательных, которые можно к ней провести через данную точку.

Lemma

Через данную общую точку вне кривой можно провести $d(d-1)$ касательных к данной гладкой кривой степени d.

Действительно, пучок прямых, проходящих через данную точку, определяет отображение данной кривой в проективную прямую: каждой точке кривой сопоставляется прямая, соединяющая ее с данной. Точки касания — критические точки этого отображения. Число критических точек у общего голоморфного отображения степени d кривой степени d в проективную прямую мы уже подсчитали.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: касательные к гладкой плоской кривой

При стремлении точки, из которой мы проводим касательные, к общей точке кривой, две проходящие через нее касательные сливаются в одну — касательную к кривой в предельной точке.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: касательные к гладкой плоской кривой

При стремлении точки, из которой мы проводим касательные, к общей точке кривой, две проходящие через нее касательные сливаются в одну — касательную к кривой в предельной точке.

Corollary

Через общую точку на гладкой плоской кривой можно провести к этой кривой $d(d-1)-2$ касательных (не считая касательной в этой точке).

Через общую точку на гладкой плоской кубике можно провести к ней $3 \cdot 2 - 2 = 4$ касательных. Эта четверка касательных определяет четверку точек $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ проективной прямой (пучка прямых, проходящих через данную точку). В свою очередь, четверке точек на проективной прямой можно сопоставить их *двойное отношение*

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} \cdot \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta} \in \mathbb{C}P^1.$$

Это отображение не может принимать значений 0 и ∞. Согласно принципу максимума, оно постоянно. Тем самым, каждой гладкой кубической кривой C сопоставляется комплексное число $j(C)$ — ее j-инвариант.

Лекция 4. Плоские алгебраические кривые: свойства двойного отношения

Семинар 4. Задачи

- Докажите, что проекция из точки является голоморфным отображением гладкой плоской кривой на проективную прямую.
-

Семинар 4. Задачи

- Докажите, что двойное отношение четырех точек не меняется при замене координаты на проективной прямой.
- Докажите свойства двойного отношения:

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [\beta, \alpha, \gamma, \delta]^{-1};$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = 1 - [\alpha, \gamma, \beta, \delta].$$

Семинар 4. Задачи

- Докажите, что функция комплексного переменного λ
$$J(\lambda) = \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$
не меняется при замене $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$, $\lambda \mapsto 1-\lambda$.
- Докажите, что если $\lambda = [\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ — двойное отношение четырех точек, то $J(\lambda)$ не зависит от порядка, в котором берутся точки.
- Докажите, что для кубики $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ ее J-инвариант равен $J(\lambda)$.

Семинар 4. Задачи

- Алгебраическая кривая в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ с проективными координатами $(u : v, s : t)$ задается уравнением $F(u, v, s, t) = 0$, где F — многочлен, однородный по переменным u, v и по переменным s, t. Найдите род кривой в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, имеющей степень m по одной и степень n по другой паре переменных.
-