Лагранжев формализм: определения, примеры

Def. Лагранжева механическая система задаётся набором:

1) M – многообразие, называемое конфигурационным пространством. $\dim M = N$ – число степеней свободы системы.

2) Лагранжиан $L : TM \to \mathbb{R}$ – функция на касательном расслоении TM, называемом фазовым пространством системы. Как правило, $L \in C^\infty(TM)$. Минимальное требование: L дважды дифференцируема и ее 2-е частные производные удовлетворяют условию Липшица.

Rem 1: В более общей формулировке $L : [t_0, t_1] \times TM \to \mathbb{R}$ является функцией на, так называемом, расширенном фазовом пространстве. В таком случае энергия механической системы не будет сохраняться (см. далее)

Rem 2. Лагранжев формализм в нерелятивистской механике менее широко применим, чем Ньютонов. Он работает только для систем, в которых действуют потенциальные силы (сила трения исключена) и на которые наложены идеальные связи. Однако лагранжев формализм, в отличие от ньютонова, естественным образом обобщается на релятивистскую механику, теорию поля и далее на квантовые теории.

Rem 3. Мы формально-математически задали исходные данные для лагранжевой мех. системы. Реальная задача математической физики – выбрать адекватные обобщенные координаты q_α, $\alpha = 1, \dots, N$ – локальные координаты на M, и построить для данной мех. системы её функцию Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$.

Динамика лагранжевой мех. системы задается уравнениями Эйлера-Лагранжа:

$$\boxed{L_\alpha := \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) L(q, \dot{q}, t) = 0} \quad (1)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, N.$

Это – дифференциальные уравнения 2-го порядка по t, поскольку при действии на функции $q, \dot{q}$ и t оператор $\frac{d}{dt}$ имеет вид:

$$\boxed{\frac{d}{dt} = \sum_{\beta=1}^{N} \left(\ddot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} + \dot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial t}} \quad (2)$$

В дальнейшем при появлении в формулах повторяющихся индексов мы подразумеваем суммирование по ним, а знак Σ опускаем.

Подставим (2) в (1):

$$L_\alpha = \ddot{q}_\beta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q_\beta \partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (1')$$

Вот член со 2-м производными $\ddot{q}_\beta$. Матрица при $\ddot{q}_\beta$:

$$\boxed{W_{\beta\alpha}(q,\dot{q},t) := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha}} \qquad (3)$$

называется <u>гессианом</u> мех. системы. Если $\det W \neq 0$, то уравнения Эйлера-Лагранжа можно разрешить относительно старших производных. Такая мех. система называется <u>невырожденной</u>. В таких системах работает теорема о $\exists!$ решения. При этом TM — пространство начальных данных системы.

<u>Rem</u>: Если $\det W = 0$, то механическая система называется <u>сингулярной</u>. В нерелятивистской механике такие системы не изучаются, но в релятивистской механике, теории поля и далее в квантовой теории сингулярные системы являются основным объектом изучения. В физике такие теории называют <u>калибровочными</u>. Для них требуется по-новому определить пространство начальных данных (не TM

Теорию сингулярных систем в середине 20 века начал строить П. Дирак — выдающийся математик физик 20 века.

Рецепт построения лагранжианов в нерелятивистской механике (следует из принципа Даламбера):

$$\boxed{L = T - U}$$

T — кинетическая энергия системы. Для системы материальных точек в декартовой ИСО

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2}},$$

$\vec{r}_i$ — радиус-векторы точек.

В цилиндрических и сферических системах:

$$\frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$

В общем случае:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}\,\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta},$$

где $W_{\alpha\beta}$ — тот самый гессиан, причем в нерел. механике $W = W(q,t)$ не зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}$, а поэтому T — квадратичная форма скоростей, причём она — положительно определенная форма.

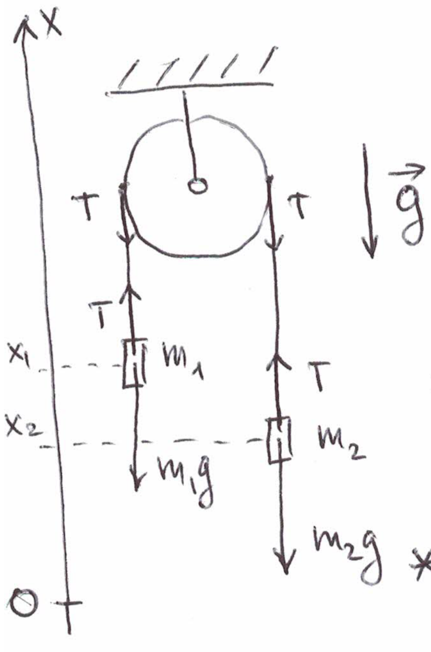
U – потенциальная энергия системы.

$$\boxed{U = U(\vec{r}_i, t) \text{ и } \vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \equiv -\vec{\nabla}_i U}$$ – это сила, действующая на i-ю материальную точку системы.

Rem: Очевидно, функция U определена с точностью до аддитивной const.

Разберем несколько примеров:

Пример 1. Машина Атвуда (пример из семинара 2)



2 груза на невесомой нерастяжимой абсолютно гибкой нити, перекинутой через невесомый блок, помещены в однородное поле тяжести.

*) x_1 и x_2 — две декартовы координаты системы (аналог $\vec{r}_i$).

**) $\boxed{x_1 + x_2 = \text{const}}$ — условие идеальной связи (аналог (3))

Поэтому система имеет $2-1=1$ степень свободы. В качестве обобщенной координаты можно выбрать, скажем, $x := x_1$, тогда параметризованное с помощью x условие связи будет иметь вид:

$$***) \begin{cases} x_1 = x \\ \boxed{x_2 = const - x} \end{cases} \text{ — аналог (8)}$$

Выражая $T_{кин}$ и U в обобщенных координатах получаем

$$T_{кин} = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)\dot{x}^2}{2}$$

$$U = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 = (m_1 - m_2) g x + const$$

$$\left(F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -m_1 g, \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -m_2 g, \quad \text{как и требуется} \right)$$

****) Лагранжиан системы:

$$\boxed{L = T_{кин} - U = \frac{(m_1+m_2)\dot{x}^2}{2} - (m_1-m_2) g x + const}$$

Заметим, что аддитивная константа несущественна как для потенциальной энергии, так и для лагранжиана. Дело в том, что и U и L потом дифференцируют для получения "физически" интересных сил $\vec{F}_i$ и уравнений движения, а при дифференцировании константы пропадают. Итак, аддитивные константы в U и L будем выбрасывать.

Посчитаем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \circ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -(m_1 - m_2) g$$

*****) Значит уравнения движения имеют вид:

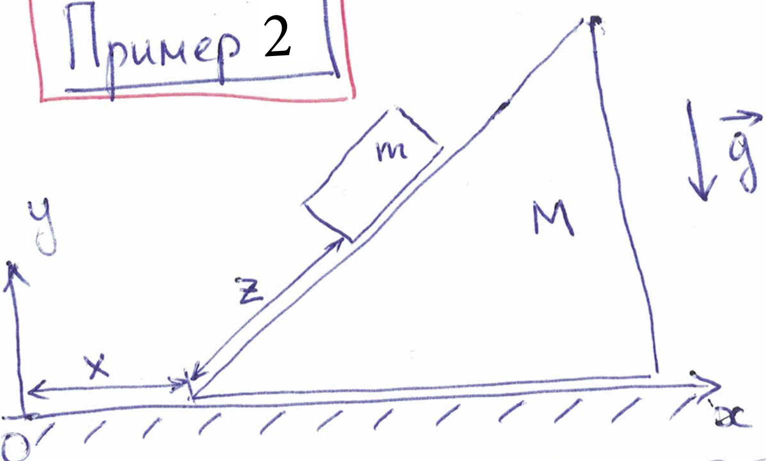
$$(m_1+m_2)\ddot{x} + (m_1-m_2)g = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \boxed{\ddot{x} = \frac{(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)}g}$$

– сравните с ответом на стр. 8 1.

Пример 2



Клин массы M на горизонтальной плоскости. Кирпич массы m на наклонной поверхности клина. Угол клина — α. Трения нет. Есть однородная сила тяжести.

Система имеет 2 степени свободы. В качестве обобщенных координат можно выбрать x и z (см. рис.), но мы заменим x на координату центра масс системы по оси $O\vec{x}$:

$$\boxed{X = \frac{Mx + m(x + z\cos\alpha)}{M+m}}$$

Кинетическая энергия в декартовых координатах:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left\{(\dot{x} + \dot{z}\cos\alpha)^2 + (\dot{z}\sin\alpha)^2\right\}$$

$$= \frac{(M+m)}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{M + m\sin^2\alpha}{M+m}\right)\dot{z}^2$$

Видно, что в терминах координат X, z кинетическая энергия (в отличие от координат x, z) является <u>диагональной квадратичной формой</u>.

Это удобко.

Rem Диагонализация квадратичной формы T в нашем случае является следствием общего факта: при переходе в систему центра масс системы материальных точек кинетическая энергия центра масс системы "отделяется" от остальных вкладов в кин. энергию:

$$\vec{r}_i \longmapsto \boxed{\vec{R} := \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}}, \quad \boxed{\vec{s}_i := \vec{r}_i - \vec{R}}$$

$$\boxed{T = \sum \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} = \left(\sum_i m_i\right) \frac{\dot{\vec{R}}^2}{2} + \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{s}}_i^{\,2}}{2}},$$

причем $\vec{s}_i$ линейно зависимы: $\sum_i m_i \vec{s}_i = 0$

Продолжаем решать наш пример:

$$U = mgz\sin\alpha$$ — пот. энергия силы тяжести.

$$\boxed{L = T - U = \frac{(M+m)}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\,\frac{M + m\sin^2\alpha}{M+m}\,\dot{z}^2 - mgz\sin\alpha}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$L_X := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) - \frac{\partial L}{\partial X} = \frac{d}{dt}\Big((M+m)\dot{X}\Big) = 0$$

Так как $\frac{\partial L}{\partial X} = 0$

Это уравнение легко проинтегрировать 1 раз и получить <u>закон сохранения</u>:

$$\boxed{P_X = (M+m)\dot{X} = \text{const}}$$

Это сохранение проекции импульса центра масс системы на ось $O\vec{x}$.

$$L_z := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = m\,\frac{M+m\sin^2\alpha}{M+m}\,\ddot z + mg\sin\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

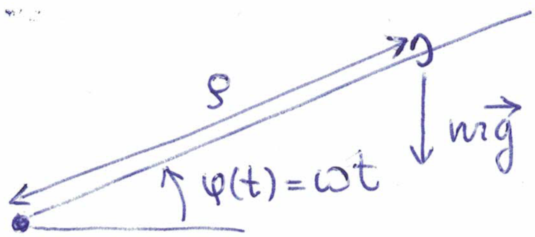
$$\boxed{\ddot z = -\frac{(M+m)\,g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}}$$

$\ddot X = 0$

$$\boxed{\ddot x = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}}$$

— равноускоренное движение.

Пример 3а Бусинка на стержне в поле тяжести.



Стержень равномерно вращается: $\varphi(t) = \omega t$. Трения нет. На бусинку действует сила тяжести.

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2\right)$$ – работаем в удобных тут полярных координатах.

$$U = mg\rho\sin\omega t$$

$$L = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 - mg\rho\sin\omega t$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\boxed{L_\rho = m\ddot\rho - m\omega^2\rho + mg\sin\omega t = 0}$$

Частное решение: $\rho(t) = \dfrac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$

Общее решение:

$$\rho(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

или в терминах начальных данных $\rho(0)=\rho_0$, $\dot\rho(0)=\dot\rho_0$:

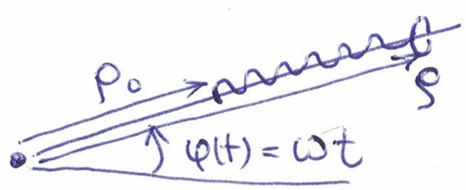
$$\boxed{\rho(t) = \rho_0 \operatorname{ch}\omega t + \left(\frac{\dot\rho_0}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right)\operatorname{sh}\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t}$$

Замечаем, что движение бусинки в ограниченной области возможно только если

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\rho_0 + \frac{\dot\rho_0}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right) = 0$$

При этом стержень надо продолжить по обе стороны от начала координат и дать возможность бусинке проскальзывать сквозь начало координат. ($\rho(t) \in \mathbb{R}$)

Пример 3б Бусинка на стержне с пружинкой.



$$T = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2\right)$$

$$U = \frac{k}{2}(\rho - \rho_0)^2$$ — потенциальная энергия абсолютно упругой пружины жесткости k, закрепленной в точке ρ_0.

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k(\vec\rho - \vec\rho_0).$$

$$L = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 - \frac{k}{2}(\rho - \rho_0)^2$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\boxed{m\ddot\rho - m\omega^2\rho + k(\rho - \rho_0) = 0}$$

Частное решение: $\rho(t) = \frac{k\rho_0}{k - m\omega^2}$ $(k \neq m\omega^2)$

Общее решение ограничено при $k > m\omega^2$:

$$\rho(t) = \frac{k\rho_0}{k - m\omega^2} + A\cos\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}\,t$$

при этом частное решение является устойчивым положением равновесия.

Если $k \leq m\omega^2$, общее решение неограничено.

При $k < m\omega^2$ частное решение — неустойчивое положение равновесия.