$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \qquad x \in [-1, 1]$$

полином Лежандра (степени $n$).

Э-то: ортогональност в $L^2(-1, 1)$.

$$(u, v) := \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = 0, \text{ если } m \neq n.$$

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\, dx =$$

$\boxed{m<n}$

$$= \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2+1)^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} \text{---} \cdot \text{---} \overset{0}{=} \cancel{Q_{m+1}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^{1} + \int^{1} \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}(x^2-1)^m \cdot \frac{d^{n-2-1}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+2} (x^2-1)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} (x^2-1)^n \, dx =$$

$$= \dots = (-1)^n \int_{-1}^{1} \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n} (x^2-1)^m} \, dx = 0.$$

$$\cancel{\tilde{Q}_{m+n}(x) \underbrace{\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2-1)^n}_{= 0} \Bigg|_{-1}^{1}} = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n} \hat{Q}_{2m} = 0.$$

$$m+n > 2m$$

$$m < n$$

Д/З 1) (очень рекомендую посчитать)

$$Q_n(1) = 2^n n!$$

(так что $P_n(1) = 1$).

2). посчитать $\|P_n\|_2$ (?? ... $\frac{2}{n+1}$)

Полнота $\{P_n\}$ в $L^2(-1,1)$ — почему?

$\parallel$

Замкнутость

$$\overline{\text{Span}\{P_n\}}^{L^2(-1,1)} = L^2(-1,1).$$

$$P_n = \underline{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_0}.$$

$\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ — полна в $\overline{L^2(-1,1)}$.

? (иначе говоря $\{Q_n,\ n \in \mathbb{N}\} = L^2(-1,1)$,

Теор. Вейерштрасса

$$\overline{\{\text{многочлены}\}}^{\|\cdot\|_\infty} = C([-1,1]).$$

$$\overline{C([-1,1])}^{L^2(-1,1)} = L^2(-1,1)$$

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in (-1,1)} |u(x)|$$

$(\Omega, \Sigma, \mu)$ $\mu$ – σ-аддитивная положит. мера

$\Sigma$ – σ алгебра "измеримых" множеств.

либо ·) $\mu(\Omega) < +\infty$ – конечная мера.

либо ·) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_k$ , $\Omega_k \in \Sigma$

$\mu(\Omega_k) < +\infty$ – σ-конечная мера.

В частности, $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Sigma$ – σ-алгебра измер. по Лебегу мн-в.

$\mu = dx$ $\Longrightarrow$ она σ-конечна

$$L^2(\Omega, \mu) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |u|^2(x)\, d\mu(x) < +\infty \right\}$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_\Omega |u|^2(x)\, d\mu(x)}$$

если это вообще имеет смысл.

Верно ли, что $\overline{C(\Omega)}^{\|\cdot\|_2} = L^2(\Omega, \mu)$.

$\Omega$ - метрич. пр-во.

Да, если $\Omega$ - метрич. пр-во, а $\Sigma$ = борелевская $\sigma$-алгебра (или ее $\mu$-пополн.)

(!) •) $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mu = dx$ ($\Sigma$ собств. $\sigma$-алгебра).

↑ ОЧЕНЬ полезно вспомнить.

•) $\Omega = (-\pi, \pi)$, $\mu = dx$

"Доказано"

$f \in L^2(-\pi, \pi)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

сходимость в смысле $\|\cdot\|_2$.

(!) 1) система $\{1, \cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}\}$ — полн. базис в $L^2(-\pi, \pi)$.

2) интересная теория рядов Фурье с Гильбертовой пр-ва

$$y(x) = P_n(x)$$

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

$$x \in (-1, 1),$$

ур-е Лежандра.

(ОДУ 2 порядка, линейное,

с перем. коэфф.,

сингулярное!)

<u>Решение.</u> $P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$

$$z(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n \underbrace{(x^2-1)^n}$$

$$u(x) := (1-x^2)^n$$

$$u'(x) = -2n\,x\,(1-x^2)^{n-1}$$

$$(1-x^2)\,u'(x) = -2n\,x\,u(x)$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left((1-x^2)\,u'(x)\right) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \,(1-x^2)^{(j)}\,(u')^{(k-j)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \,(1-x^2)^{(j)}\,u^{(k-j+1)} =$$

$$= \underline{(1-x^2)\,u^{(k+1)} - 2kx\,u^{(k)} - \cancel{2}\,\frac{k(k-1)}{\cancel{2}}\,u^{(k-1)}}$$

$j = 0, 1, 2$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left(-2nx\,u(x)\right) = \underline{-2n\left(x\,u^{(k)} + k\,u^{(k-1)}\right)}$$

$k = n+1$

$$(1-x^2)\,u^{(n+2)} - 2(n+1)\,x\,u^{(n+1)} - n(n+1)\,u^{(n)} =$$

$$= -2nx\,u^{(n+1)} - 2n(n+1)\,u^{(n)}$$

$$(1-x^2)\,u^{(n+2)} - 2x\,u^{(n+1)} + n(n+1)\,u^{(n)} = 0$$

$$z(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)} (x^2-1)^n = (-1)^n u^{(n)}$$

$$y = u^{(n)} \Rightarrow (1-x^2)\,y'' - 2xy' + n(n+1)\,y = 0$$

ч.т.д.

$w(\theta) := P_n(\cos\theta)$.

какому ОДУ удовлетворяет $w(\theta)$?

(т.е. во что перейдет ур-е Лежандра).

Д-ть: $L^2\left((0,\pi)^2\right)$

Д-ть, что $\{\sin kx \sin mx\}$