# Основной интересный пример

$L^2(-\pi, \pi)$ $\qquad \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin kx, \cos kx, \dots\}$

$f \in L^2(-\pi, \pi)$ $\qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = -i\,\frac{\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)}{2\cancel{i}}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - i b_k}{2}\right) e^{ikx} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k + i b_k}{2}\right) e^{-ikx} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} c_k e^{ikx} = , \qquad c_k = \begin{cases} \dfrac{a_k - i b_k}{2}, & k = 1, 2, 3, \dots \\ \dfrac{a_k + i b_k}{2}, & k = -1, -2, -3, \dots \\ \dfrac{a_0}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

$$\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 2\pi, & k = m \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad \Big\} \times e^{-imx}$$

$$(f, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\,dx = c_m 2\pi.$$

(1). $$\boxed{c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx.} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Все это верно и для $f \in L^2([-\pi,\pi]; \mathbb{C})$.

$$(u,v)_{L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \qquad c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{-ikz}\,dz$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|^2\,dz$$ — равенство Парсеваля

В частности, если $f$ — вещественнозначная, то

$$c_k = \overline{c_{-k}} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{-ikz} dz \qquad f(\cdot) \in \mathbb{R}$$

$$\overline{c_k} = \int_{-\pi}^{\pi} \underset{\underset{f(z)}{\parallel}}{\overline{f(z)}}\, e^{ikz} dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{-i(-k)z} dz = c_{-k}$$

<u>Отступление.</u> <u>Напоминание о пр-вах Лебега.</u>

$(\Omega, \Sigma, \mu)$

$\Sigma$ — измеримые множества.

$\Omega \neq \emptyset$ мн-во, $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ σ-алгебра

$\mu \geq 0$ неотриц. σ-аддитивная на $\Sigma$ мера.

$\mu$ - $\sigma$ - конечна, т.е. $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, $\Omega_i \in \Sigma$,

$\mu(\Omega_i) < +\infty$.

(в частности, это так, если $\mu$ - конечна, т.е. $\mu(\Omega) < +\infty$)

Примеры. (пр. пр-в и мер).

1). $\Omega = (-1, 1)$ $\mu$ - мера Лебега $= dx = \mathcal{L}^1$

$\Sigma$ - борелевская $\sigma$-алгебра или $\sigma$-алгебра мн-в, измер. по Лебегу.

$(\mathbb{R}^n, dx)$, $\mathcal{L}^n$

2). Вместо $\Omega = (-1, 1)$ можно было брать любое откр (или даже просто измер.) подмн-во $\mathbb{R}^n$).

3). $\Omega = \mathbb{R}^n$ $\quad\mu = \delta_{x_0}$ – мера Дирака, сосред. в $x_0$.

$$\delta_{x_0}(e) := \begin{cases} 0, & x_0 \notin e. \\ 1, & x_0 \in e. \end{cases}$$

("точечный заряд")

$$L^p(\Omega, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C} : \underbrace{\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x)}_{<+\infty} < \right\}$$

$(1 \leq p < +\infty)$.

Особенно интересные случаи: $p = 1$, $p = 2$.

$$\|f\|_p := \left( \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

"норма"

$f_1 \sim f_2$, $\quad f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$

akko $f_1(x) = f_2(x)$ $\quad \mu$-s.s. $x \in \Omega$.

$$\mathcal{L}^p(\Omega,\mu) / \sim \; =: L^p(\Omega,\mu).$$

$$\|f\|_\infty = \mu\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f|(x) := \inf \{ C \geq 0 : |f(x)| \leq C \ \ \mu\text{-s.s. } x \in \Omega \}$$

ili $\mathbb{C}$

$$L^\infty(\Omega,\mu) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ \|f\|_\infty < +\infty \}.$$

# Справочные факты о $L^p$.

**1°** Нер-во Гёльдера

$$\int_\Omega |f(x) g(x)| \, d\mu(x) \le \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'} \qquad (H)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Упражнение. (Д-ть с исп. (H))

(Более общая версия.

$$\|fg\|_q \le \|f\|_p \|g\|_r \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}.)$$

Упражнение

**2°** Нер-во Кларксона.

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \le \frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

$$\left(\forall f, g \in L^p(\Omega,\mu)\right).$$

N.B.

Для $p=2$ это НА САМОМ ДЕЛЕ равенство (!) параллелограмма.

неполноты. 3°| $L^p(\Omega, \mu)$ – банахово пр-во

$1 \le p \le +\infty$

$p = 2$ это гильбертово пр-во.

$$(u, v)_{L^2(\Omega, \mu)} := \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, d\mu(x)$$

4°| $f_k \in L^p(\Omega, \mu)$, $f_k \xrightarrow{L^p} f \in L^p(\Omega, \mu)$.

$$\|f_k - f\|_p^p = \int_\Omega |f_k(x) - f(x)|^p\, d\mu(x) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Тогда $\exists \{f_{k_l}\}_l$ $\quad f_{k_l}(x) \to f(x)$

$\mu$ - п.в. $x$.

Важно: наоборот - неверно!

Пример. $L^2(0,1)$ $\quad (\mu = dx)$


$$f_k(x) = \begin{cases} k, & x \in (0, \frac{1}{k}) \\ 0, & x \in [\frac{1}{k}, 1). \end{cases}$$

п.в. $\quad f_k(x) \to 0.$

$$\int_0^1 |f_k(x)| = 1 \not\to 0.$$

5°) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (откр.) $\qquad \mu = dx$

$L^p(\Omega)$

$f \in C_b(\Omega)$, $\qquad f_k \in C_b(\Omega)$

$\uparrow$ bounded

$$\|f_k - f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| \to 0$$

Иначе говоря, $f_k \rightrightarrows f$ равномерно

Упражнение. Правда $f_k \xrightarrow{L^p} f$ $\quad \forall p \in [1, \infty]$.

$\underline{6^{\circ}}$ Если $\Omega$ – сепараб. метрич. пр-во,

$\Sigma$ – либо борелевская, либо ее $\mu$-пополнение,

Тогда $L^p(\Omega,\mu)$ – сепараб. при $p\in[1,+\infty)$

– не сепараб. при $p=+\infty$.

## Свертки и аппроксимация функций.

$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$ $\mu = dx$

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

1°) $(f * g)(x) = (g * f)(x)$

2°) $f \in L^p,\ g \in L^q \qquad f * g \in L^r$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

В частности, – если $p = 1$ (т.е. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$), то $r = q$, т.е. $f * g \in L^q(\mathbb{R})$

– если $p = +\infty$, т.е. $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

?

$3^s$

$f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ $\qquad$ $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

($k$ раз непр. дифф. и финитная функция).

$\operatorname{supp} f := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ — компактно.

носитель $f$.

$f * g$ определена и, более того, $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g.$$

4°) $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$

5°) $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $\quad \psi \geq 0$ ← не обязат.

$$\int_{\mathbb{R}} \psi \, dx = 1.$$

?? есть ли такие?

Пример. $\psi(x) = C \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Д-ть, что $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\varphi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \qquad \varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Проверете $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(x)|\,dx = 1.$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Упр. $\longrightarrow$ (!) $f \in C(\mathbb{R}^n)$ $\qquad f * \varphi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} f$ равном. на компакти.

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\qquad$ $\underset{\varepsilon \to 0^+}{f * \varphi_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f}$ $\qquad$ $1 \leq p < +\infty$ (но не $p = +\infty$)

$\cap$

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Д-во при помощи $5^\circ$

$6^\circ$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открытое $\Big\{$ $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L^p(\Omega)$

$\mu = dx$

$1 \leq p < +\infty$

(но не $p = +\infty$)