Задача 1

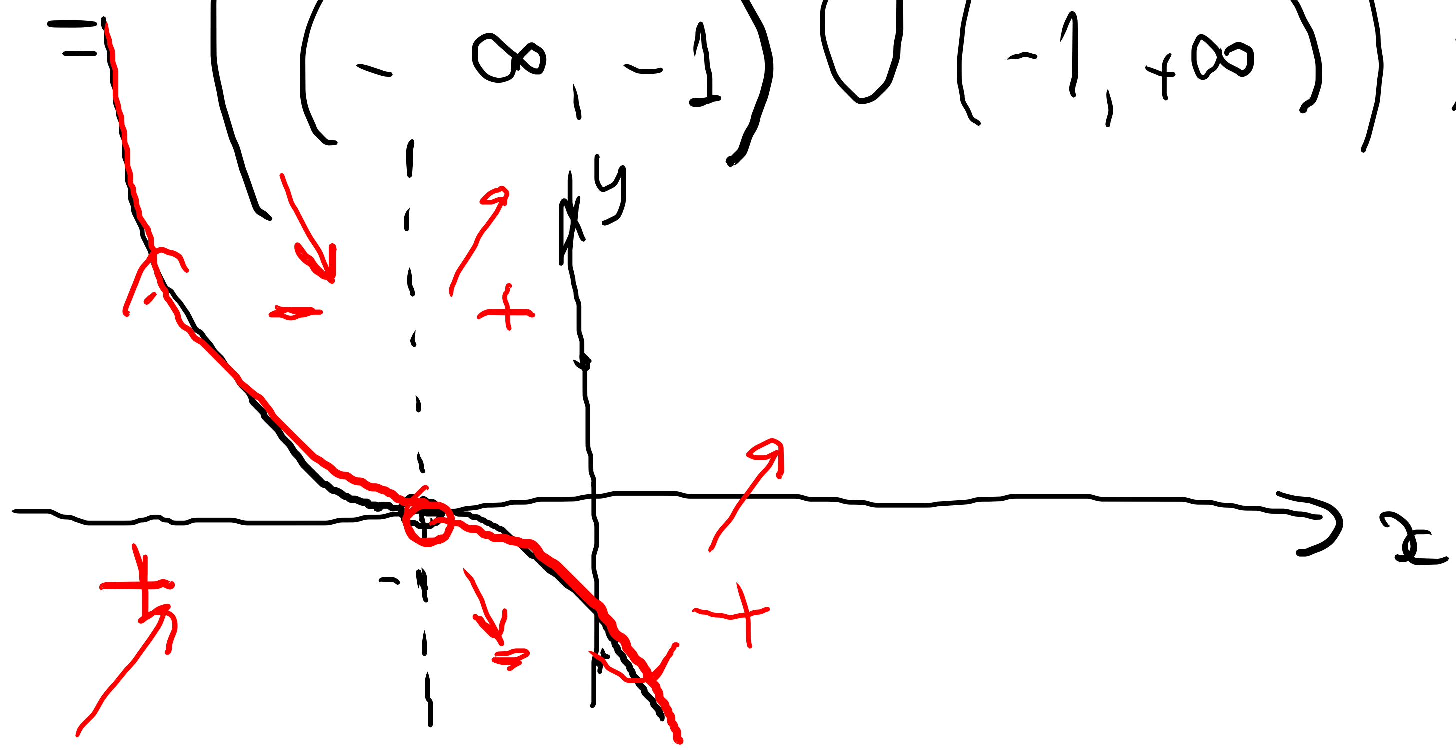
$$\begin{cases} y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (x_0 \neq -1)$$

$y' + a(x)y = b(x)$

Решение

$f(x, y) = \dfrac{2y}{x+1} + (x+1)^2$ гладкая

$D = \left((-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \right) \times \mathbb{R}$



$$y'(x) = \frac{2y}{x+1} + (x+1)^2$$

$$y'(x) > 0 \iff \frac{2y}{x+1} + (x+1)^2 > 0 \iff \frac{y}{x+1} > -\frac{(x+1)^2}{2}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1 \\ y > -\dfrac{(x+1)^3}{2} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x < -1 \\ y < -\dfrac{(x+1)^3}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$y' = 0 \iff y = \frac{-(x+1)^3}{2}$$

Упражнение: найти y'' и определить интервалы выпуклости / вогнутости и точки перегиба траектории.

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$$

$$y = uv$$

$$y' = u'v + v'u$$

$$u'v + v'u - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^2$$

$$v\Big(\underbrace{u' - \frac{2u}{x+1}}_{0}\Big) + \underline{v'u = (x+1)^2}$$

Выберем u так, чтобы

$$u' = \frac{2u}{x+1}.$$

$$u' = \frac{2u}{x+1}$$

нужно одно какое-то (удобнее!) решение.

$$\frac{du}{u} = \frac{2\,dx}{x+1}$$

$$\ln u = \ln (x+1)^2$$

выбираем ⇝ $u = (x+1)^2$

$$\Rightarrow v' u = (x+1)^2$$

$$v' \cancel{(x+1)^2} = \cancel{(x+1)^2}$$

$$v' = 1. \qquad \Rightarrow \quad v = x + C$$

$$y(x) = u(x)\,v(x) =$$

$$= (x+1)^2 (x+C) =$$

разные const (!)

$$= (x+1)^2 (x+1+C) =$$

$$= (x+1)^3 + C(x+1)^2$$

$$y_0 = y(x_0) = (x_0+1)^3 + c(x_0+1)^2.$$

$$C = C(x_0, y_0) := \frac{y_0 - (x_0+1)^3}{(x_0+1)^2} = \frac{y_0}{(x_0+1)^2} - x_0 - 1$$

в) Рассматриваем 2 случая.

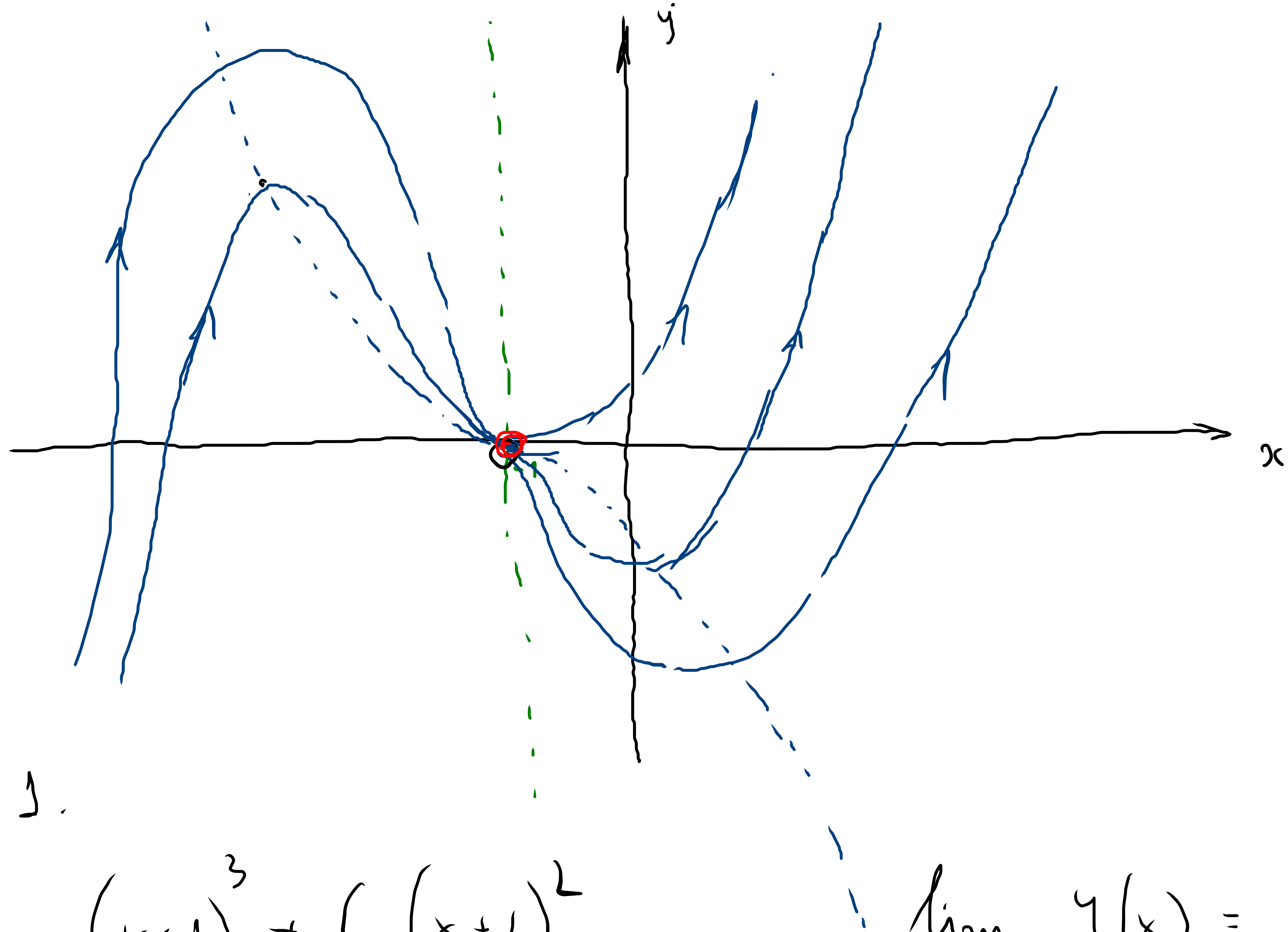
1) $x_0 > -1$. $\quad y = (x+1)^3 + C(x_0, y_0)(x+1)^2$

опред. на $(-1, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$

Тогда: $y = \underbrace{(x+1)^3}_{} + o\left((x+1)^3\right)$ при $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to -1} y(x) = 0$$



2°) $x_0 < -1$.

$$y(x) = \underbrace{(x+1)^3} + C\,(x+1)^2$$

$$\lim_{x \to -1} y(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$$

$$y(x) = (x+1)^3 + o\left((x+1)^3\right)$$

Задача 2.

$$\begin{cases} y'\left(\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\right)+\dfrac{2x}{y^3}=0 & (1) \\ y(x_0)=y_0 \leftarrow \text{Д/з}. \end{cases}$$

$y \neq 0$

$y_0 \neq 0$

$x_0=0$, $y_0=1$. $y(0)=1$. $\leftarrow$ на семинаре

Решение.

$$y'=\frac{-2x/y^3}{(y^2-3x^2)/y^4}=\frac{-2xy}{y^2-3x^2} \quad (2)$$

$\boxed{y^2 \neq 3x^2}$ $\leftarrow$ в (2), но не в (1)

Если $y^2=3x^2$, то $\dfrac{2x}{y^3}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$.

т.е. этот случай сводится к точке $(0,0)$

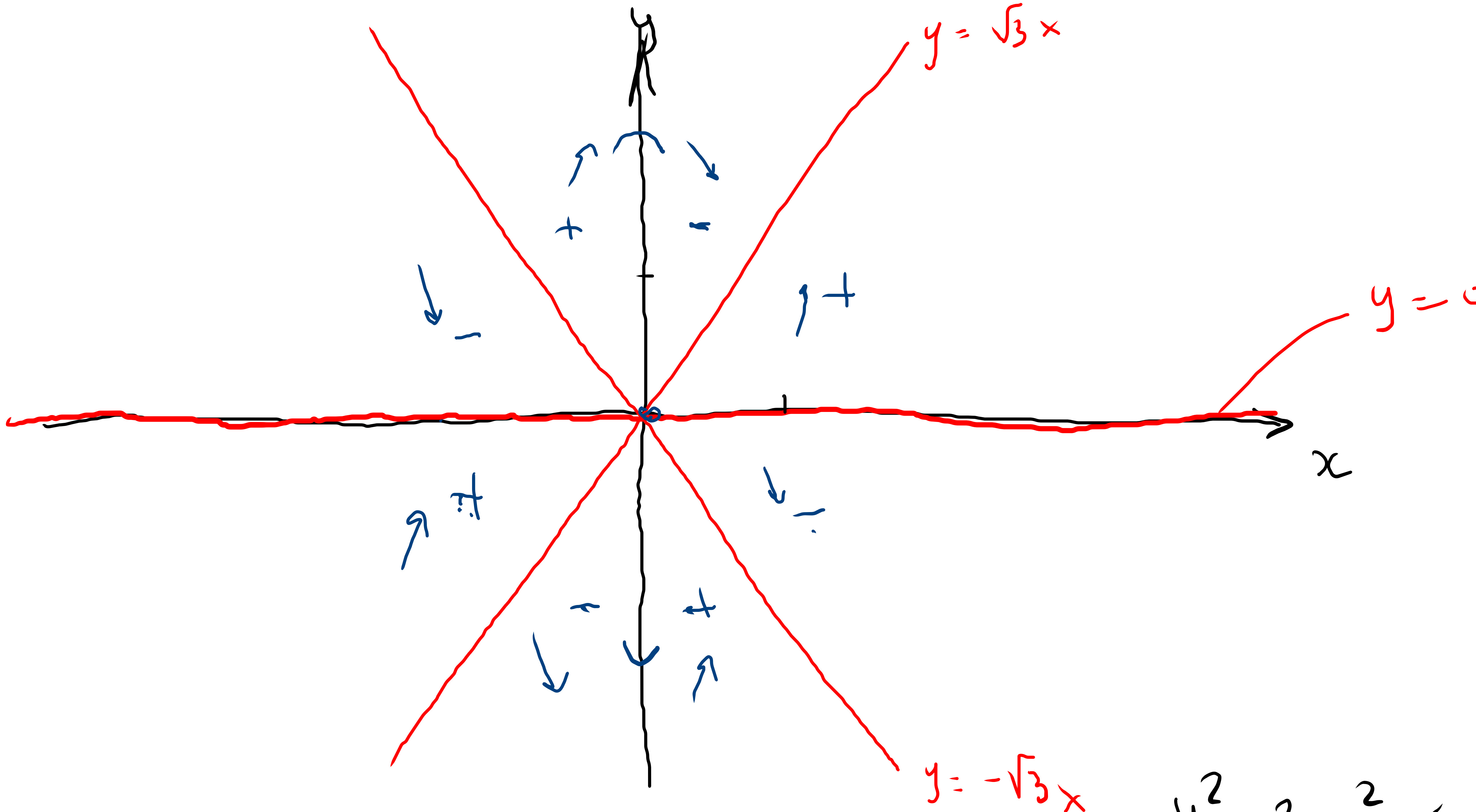
Вывод: т.к. $y \neq 0$, то $(1) \Leftrightarrow (2)$

1) $y' = \dfrac{-2xy}{y^2 - 3x^2}$ $\quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) :$ либо $y^2 = 3x^2$, либо $y = 0\}$

$\Rightarrow$ вып. условия теоремы $\exists$ и единств.

в окр. x_0.

2). Интервалы монотонности траекторий.



$$y^2 = 3x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}x$$

$$y' = \frac{-2xy}{y^2 - 3x^2}$$

Д/З : исследовать симметрию.

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)+\frac{2x}{y^3}=0$$

$$\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)dy+\frac{2x}{y^3}dx=0.$$

$$\omega := \underbrace{f(x,y)\,dy + g(x,y)\,dx}$$

1 – форма

1 – дифф. форма

0 – форма = функция.

$$\varphi = \varphi(x, y)$$

$$d\varphi = \varphi_x \, dx + \varphi_y \, dy$$

? $$\omega = f\,dx + g\,dy$$

Правда ли, что $\exists\ \varphi = \varphi(x, y)$:

$$\omega = d\varphi \ ?$$

Иначе говоря,

$$\begin{cases} f = \varphi_x \\ g = \varphi_y \end{cases}$$

Если да, то $\varphi_{xy} = \frac{\partial f}{\partial y}$

и

$\varphi_{yx} = \frac{\partial g}{\partial x}$, то есть

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}}$$

если это выполнено, то ω наз. "замкнутой 1-формой"

В нашем случае $f(x,y) = \frac{2x}{y^3}$

$g(x,y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$

$f_y = -\frac{6x}{y^4}$

$g_x = \frac{1}{y^4}(-6x)$

названия: "точная 1-форма",

т. е. $\omega = d\varphi$

Надо найти φ: $\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = f \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = g. \end{cases}$

Система (Д.У.) Пфаффа.