$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}, \quad x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$

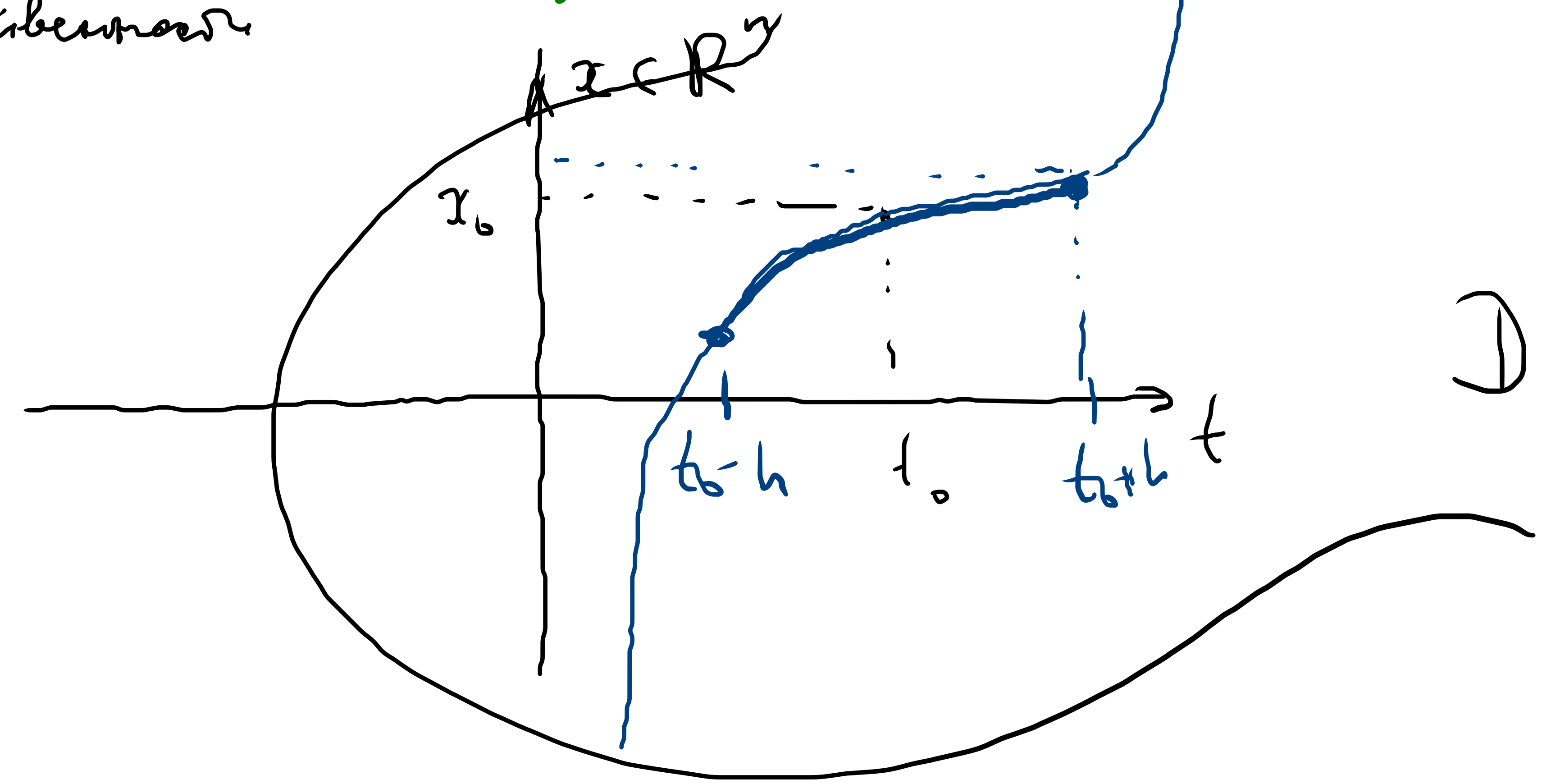
$f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

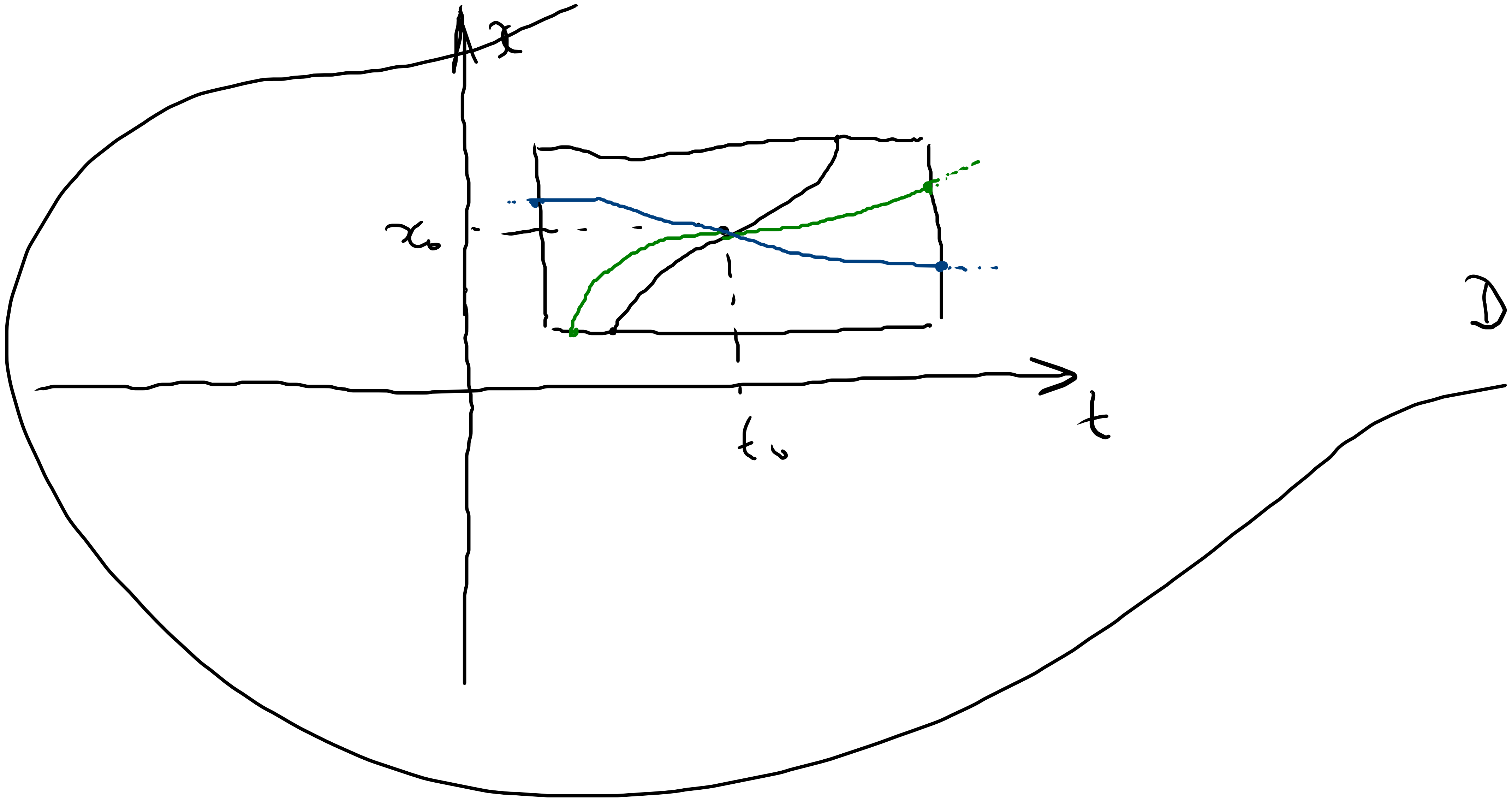
$(t_0, x_0) \in D$

идея $\rightsquigarrow$ схема Эйлера (метод ломаных)

1) Теор. существования $\Rightarrow$ локальное существ.

2) Теор. единственности





Для простоты будем считать $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

<u>Следствие 1.</u> $|x(t)| \leq C \Rightarrow \exists$ глобальное.

(если $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, то $x(t)$ опред. $\forall t \in \mathbb{R}$)

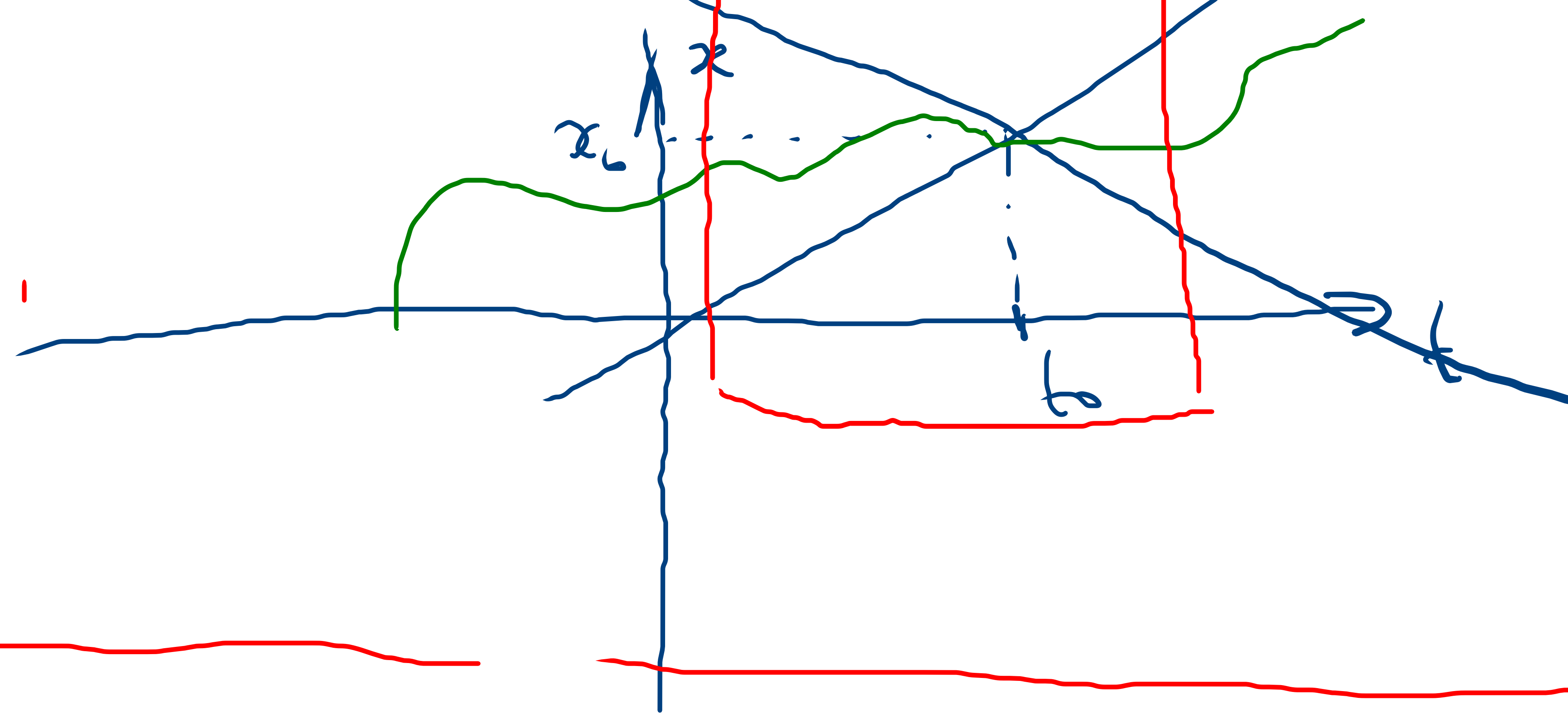
<u>Следствие 2.</u> $|f(t, x)| \leq C \Rightarrow$ —— " —— " —— " ——

Д-во: если $|f| \leq C$, то $|\dot{x}| = |f| \leq C$.

$$|x(t) - \underset{x_0}{\underbrace{x(t_0)}}| = |\dot{x}(\xi)|\,|t - t_0| \leq C|t - t_0|$$

теор. Лагранжа

$$|x(t) - x_0| \leq C|t - t_0|$$



Замечание. Достаточно намного меньше, чем $|f| \le C$,

а именно, достаточно

«подлинейный рост»

$$|f(t,x)| \le A + B|x|$$

$$A, B > 0.$$

(Тогда тоже $\exists$ глобально, в частности, если $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, то $x(t)$ опред. $\forall t \in \mathbb{R}$).

Дифференциальные неравенства (неравенство Чаплыгина).

$n = 1$ (не система, а СКАЛЯРНОЕ уравнение)

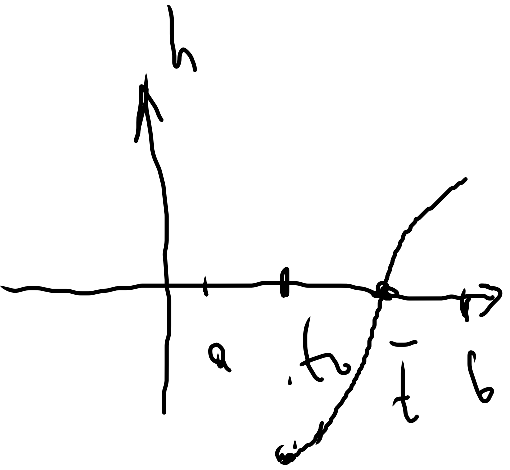
Теор. $x(\cdot) \in C^1(a, b)$ и f такая, как в теор. единственности

$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le K|x_1 - x_2|$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \le f(t, x(t)) \\ x(t_0) \le x_0 \end{cases} \quad \forall t \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x(t) \le y(t) \quad \forall t \in [t_0, b)$$

Пусть $y(\cdot) \in C^1(a, b)$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$



Доказательство.

$$h(t) := x(t) - y(t)$$

(!) Надо д-ть, что $h(t) \le 0$ $\forall t \in [t_0, b)$.

$$h(t_0) = x(t_0) - y(t_0) \le x_0 - x_0 \le 0$$

Пусть (!) неверно. Обозначим $\bar t := \overset{\inf}{\cancel{\min}} \{ t > t_0 : h(t) > 0 \}$

$\Rightarrow$ $h(\bar t) = 0$, $h(t) > 0$ $\forall t \in (\bar t, \bar t + \varepsilon)$ для какого-то $\varepsilon > 0$

$$\dot h(t) = \dot x(t) - \dot y(t) \le f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \le K\,|x(t) - y(t)| = K\,|h(t)|$$

$$= K h(t)$$

$t \in (\bar t, \bar t + \varepsilon)$

$h(\bar{t})=0$, $\quad \underline{h(t)>0} \quad \forall t\in(\bar{t},\bar{t}+\varepsilon)$

$\dot{h}(t)\le K h(t)$ — " —

$$\underline{h(t)} = h(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{t} \dot{h}(s)\,ds \le$$

$$\le \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{h(\bar{t})} + K\int_{\bar{t}}^{t} h(s)\,ds =$$

$$= K\int_{\bar{t}}^{t} h(s)\,ds.$$

Нер-во Гронуолла $\Rightarrow$ $\underline{h(t)=0}$ на $(\bar{t},\bar{t}+\varepsilon)$

противоречие(!)

ч.т.д.

Пример (был в Д/З)

$$\begin{cases} y' = \sin(\overbrace{y-x}^{z}) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(\cdot) \in \mathbb{R}$

$f(x, y) = \sin(y-x)$

$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Выполнены условия теор. $\exists$ и единственности

В частности, траектории не пересекаются.

2). $|\sin(y-x)| \leq 1 \Rightarrow y(x)$ опред $\forall x \in \mathbb{R}$

Следствие 2

3) $\exists\, z(x) := y(x) - x \Rightarrow y(x) = z(x) + x$, $y' = z' + 1$.

$$z' + 1 = \sin z.$$

$$\begin{cases} z' = \sin z - 1. \\ z(x_0) = y_0 - x_0 \end{cases} \longleftarrow \text{автономное}$$

Стац. решения $z = \text{const}$.

$0 = z'$ $\quad \sin z - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin z = 1.$

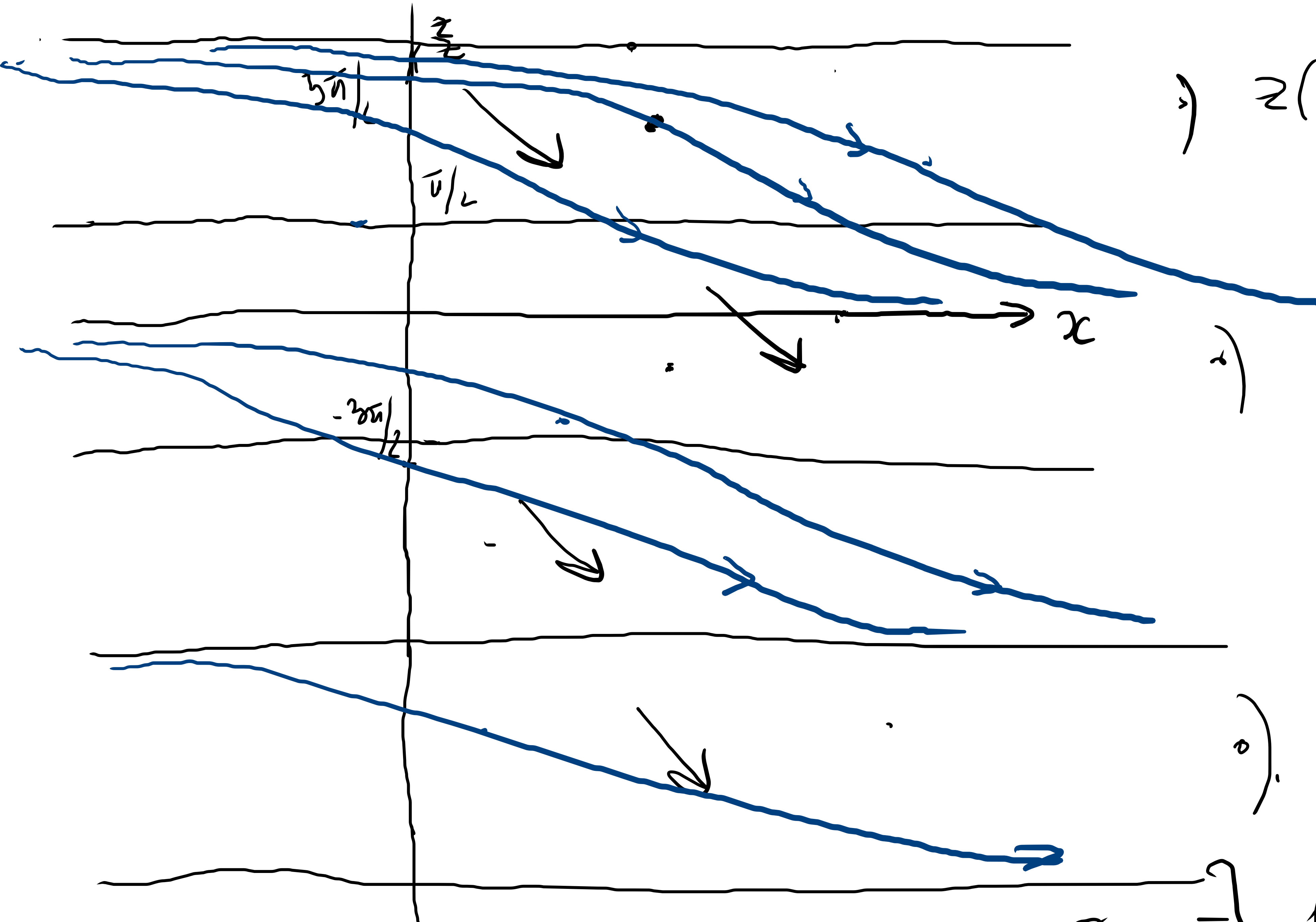
$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

можно использовать разделение перем., т.е.

$$\frac{dz}{\sin z - 1} = dx$$

интегрировать

(!) осторожно: надо отдельно рассм. случай $\sin z = 1$.



1) $z(x)$ в соотв. полосе $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sin z \le 1$

2) в полосах $\sin z < 1$, т.е. $z' < 0$.

3) $z(x)$, $x \to \pm\infty$?

$\exists \lim\limits_{x \to \pm\infty} z(x)$ по теор. Вейерштрасса (монотонность + ограниченность)

$$\lim_{x\to+\infty} z(x) =: a \qquad a = a(x_0, y_0)$$

Теор. Лагранжа

Рассм. $\underbrace{z(k+1)}_{\to a} - \underbrace{z(k)}_{\to a} = z'(\xi_k)\big((k+1)-k\big) =$

$k \in \mathbb{N}, \; k \to +\infty$

$\xi_k \in [k, k+1]$

$$\Rightarrow z'(\xi_k) = \sin z(\xi_k) - 1.$$

$\xi_k \to +\infty, \; z(\xi_k) \to a \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin z(\xi_k) \to \sin a.$

Но

$$z'(\xi_k) = z(k+1) - z(k) \to a - a = 0.$$

Т.о.

$$z'(\xi_k) \to \sin a - 1.$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$\sin a - 1 = 0 \implies a = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$$ для какого-то $m \in \mathbb{Z}$.

Упражнение: Аналогично $b := \lim_{x \to -\infty} z(x) \implies \sin b = 1$, т.е. $b = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ для какого-то $n \in \mathbb{Z}$.

Чтобы нарисовать $y(x)$, вспомним, что

$$y(x) = z(x) + x.$$