Основные свойства лагранжева формализма:

(A) Одна и та же механическая система задается классом эквивалентности лагранжианов L_f:

$$\boxed{L_f(q,\dot q,t) = L_0(q,\dot q,t) + \frac{d}{dt}\big(f(q,t)\big)} \quad (**)$$

где f – произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция.

Более того, для всего класса L_f уравнения Эйлера-Лагранжа совпадают тождественно.

Для доказательства надо проверить:

$$\left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right)\frac{df(q,t)}{dt} \equiv 0, \quad \forall \alpha. \text{ (проверьте)}$$

Свойство (**) обобщает утверждение о том, что потенциальная энергия $U(q,t)$ определена с точностью до константы. И это содержательное обобщение. В частности, оно гарантирует физическую неразличимость наблюдений свободной частицы в двух ИСО, одна из которых движется равномерно и прямолинейно относительно другой. Действительно, для одномерной свободной частицы:

$L_0 = \frac{m}{2}\dot x^2$. В движущейся системе

$x'(t) = x(t) + v t$, поэтому

$$L' = \frac{m}{2}\dot{x}'^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}+v)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{d}{dt}\left(mvx + \frac{mv^2 t}{2}\right)$$

$$L' = L_0 + \frac{d}{dt}\left(mvx + \frac{mv^2}{2}t\right),$$

откуда следует тождественность уравнений Э.-Л. в двух системах отсчёта.

(B) Лагранжев формализм ковариантен при, так называемых, точечных заменах координат: если на (расширенном) конфигурационном пространстве системы есть две системы координат

$\{q_\alpha\}$ и $\{y_\alpha\}$, связанных обратимым преобразованием

$$\boxed{y_\alpha = y_\alpha(q,t)},$$

причем в координатах $\{y_\alpha\}$ система задается лагранжианом $L^{(y)}(y,\dot{y},t)$, то в координатах $\{q_\alpha\}$ она задается лагранжианом

$$\boxed{L^{(q)}(q,\dot{q},t) = L^{(y)}(y(q,t),\dot{y}(q,t),t)}$$

Доказательство этого утверждения сводится к проверке того, что уравнения Э.-Л., отвечающие лагранжианам $L^{(q)}$ и $L^{(y)}$ связаны обратимым линейным преобразованием, а значит тождественны:

$$\boxed{L^{(q)}_\alpha = L^{(y)}_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha}}$$

Действительно, т.к. $\frac{\partial \dot y_\beta}{\partial \dot q_\alpha} = \frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha}$, то

$$L^{(q)}_\alpha = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) L^{(y)}\left(y(q,t), \dot y(q,t), t\right) =$$

только в $\dot y$ есть $\dot q$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^{(y)}}{\partial \dot y_\beta}\frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha}\right) - \left(\frac{\partial L^{(y)}}{\partial y_\beta}\frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial L^{(y)}}{\partial \dot y_\beta}\frac{\partial \dot y_\beta}{\partial q_\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L^{(y)}}{\partial \dot y_\beta} - \frac{\partial L^{(y)}}{\partial y_\beta}\right)\frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial L^{(y)}}{\partial \dot y_\beta}\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \dot y_\beta}{\partial q_\alpha}\right)} =$$

$$= L^{(y)}_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} \quad ▨$$

Зануляется, т.к. $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\partial}{\partial q_\alpha}$ коммутируют при действии на $y_\beta(q,t)$.

С1 Если лагранжиан системы не зависит от какой-то обобщенной координаты q_{α_0}, т.е. $\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha_0}} = 0$, то выполняется закон сохранения соответствующего ей обобщенного импульса

$$\boxed{p_{\alpha_0} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot q_{\alpha_0}} = \text{const}}$$

Это очевидно следует из уравнения Э.-Л. L_{α_0}

Координата q_{α_0} в таком случае называется **циклической**.

С2 Если лагранжиан системы не зависит явно от времени — $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то выполняется закон сохранения энергии

$$\boxed{E \overset{\text{def}}{=} \sum_\alpha \dot q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - L = \text{const}} \qquad (***)$$

Проверяем:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_\alpha \left(\cancel{\ddot q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}} + \dot q_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right)\right) -$$

$$- \left(\sum_\alpha \left(\dot q_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \cancel{\ddot q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \right) =$$

$$= \sum_\alpha \dot q_\alpha \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) L - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_\alpha \dot q_\alpha L_\alpha - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\frac{\partial L}{\partial t}} =$$

зануляется на траекториях движения системы | по условию

$= 0$ ∎

Формула (***) даёт общее определение энергии системы, пригодное не только в нерелятивистской механике.

В нерелятивистской механике её можно преобразовать к привычному виду. Дело в том, что дифференциальный оператор $\sum_\alpha \dot q_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot q_\alpha}$ на однородных многочленах от переменных $\dot{q}^\alpha$ общей степени k — $P^{(k)}(\dot{q}^\alpha, \ldots)$ — действует так:

произвольная зависимость от других переменных

$$\boxed{\sum_\alpha \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} P^{(k)} = k\, P^{(k)}}$$

В частности, на кинетической энергии: $\sum_\alpha \dot{q}^\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = 2T$,

на потенциальной $\sum_\alpha \dot{q}^\alpha \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0$, поэтому

$\sum_\alpha \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = 2T$, если $L = T - U$, и получаем

$$\boxed{E = 2T - (T-U) = T + U}$$

знакомая формула.