Домашнее задание (листок) 2

Анализ, 2 курс, весенний семестр

Дедлайн: 31.03.2021

Задача 1. Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|$ сходится. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx)$ сходится равномерно при $x \in \mathbb{R}$ и его сумма является непрерывной периодической функцией. Чему равны коэффициенты Фурье этой функции по системе $\{\sin(nx)\}$ на $(0,\pi)$?

Задача 2. Пусть $f \in L^2(-\pi;\pi)$ и a_n, b_n $(n = 1, 2, \dots)$ – коэффициенты Фурье f по стандартной тригонометрической системе. Доказать равномерную сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx$ при $x \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Пусть функция $f \in L^1(0,\pi)$. Рассмотрим ее коэффициенты Фурье $\{c_n\}$ по тригонометрической системе $\{\sin(nx)\}$ или $\{1, \cos(nx)\}$.

a) Доказать, что $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$. (Указание: использовать лемму Римана).

b) Обязательно ли сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$?

c) При каком условии сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$?

Задача 4. Зная коэффициенты Фурье $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислите коэффициенты Фурье $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ "усредненной" функции $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$.

Задача 5. Показать, что функция $f(x) = \ln|2\sin\frac{x}{2}|$ лежит в $L^2(-\pi,\pi)$. Разложить в ее в ряд Фурье на интервале $(-\pi,\pi)$.

Задача 6. Пусть функции $f, g \in L^2((-\pi;\pi);\mathbb{C})$. Рассмотрим соответствующие им ряды Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$, где $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}dx,\ n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $fg \in L^1((-\pi;\pi);\mathbb{C})$ и коэффициенты Фурье произведения fg могут быть получены при перемножении формальных рядов Фурье функций f и g. Обоснуйте полученные формулы.

Задача 7. Пусть вещественная функция f непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, удовлетворяет соотношению $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0$ и имеет на $(0,\pi)$ производную f', которая принадлежит $L^2(0,\pi)$. Доказать *неравенство Пуанкаре-Виртингера* (ср. с неравенством Стеклова с семинара):

$$\int_0^{\pi}(f(x))^2dx \le \int_0^{\pi}(f'(x))^2dx,$$

в котором равенство достигается лишь при $f(x) = a\cos x$.

Задача 8. Пусть функция $f \in C[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, причем для ее коэффициентов Фурье $\{c_n\}$ по системе $\{\sin(nx)\}$ выполнено условие $c_n = o(1/n)$. Доказать, что ряд Фурье сходится к f равномерно на $[0,\pi]$. (Указание: применить теорему Фейера.)

Задача 9. Пусть $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Доказать, что суммы Фейера $\sigma_n(x)$ функции f сходятся к f по норме пространства $L^1(-\pi,\pi)$. Следствие: Всякая функция из пространства $L^1(-\pi,\pi)$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

Задача 10. a)(*) Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}},\ x \in [0,2\pi]$, сходится, его сумма $f(x)$ непрерывна при $x \in (0,2\pi)$, и $f \in L^1(0,2\pi)$, но $f \notin L^2(0,2\pi)$.

b)(*) Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\ln n}$ сходится при $x \in (0,2\pi)$ к некоторой непрерывной функции $f(x)$ на этом интервале, но $f \notin L^1(0,2\pi)$.