Задание 2. Алгебры Ивахори-Гекке. (1)

(1) Докажите, что любой элемент $x \in H_n(q)$ представим в виде линейной комбинации мономов вида

$$x_{i_1 i_2 \dots i_n} := c_{i_1 1}\, c_{i_2 2} \cdots c_{i_n n}\,, \quad i_k \in \{1,2,\dots,k\},$$

где $c_{ij} := g_{j-1}\, g_{j-2} \cdots g_i \;\; \forall i<j$, $c_{ii} := 1$.

(стр. 3 записок лекций)

(2) Представьте элементы

$$j_i := \frac{J_i - 1}{q - q^{-1}}, \quad i = 1,\dots,n$$

в виде многочленов от артиновых генераторов g_i. В пределе $q \to 1$ представьте g_i в виде линейной комбинации транспозиций (jk). $\{j_i\}_{i=1\dots n}$ – набор элементов Юциса-Мэрфи для $\mathbb{C}[S_n]$.

(3) Докажите, что набор симметрических полиномов от J_i, $i = 1\dots n$, принадлежит центру алгебры $H_n(q)$ (стр. 6-7 записок)

4. Докажите, что при $q^2=-1$ алгебра $H_2(q)$ изоморфна неполупростой алгебре верхне-треугольных матриц 2×2 вида:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x,y\in\mathbb{C}.$$

5. Докажите Правило построения допустимых индексов для базисных векторов v_α неприводимого представления алгебры $H_n(q)$ /см. стр. 17 записок лекций/.

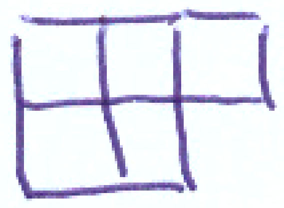
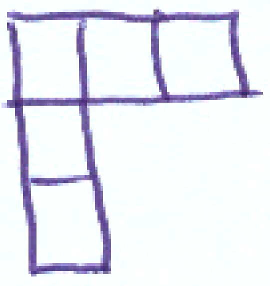
Воспользуйтесь теоремой 1 /стр. 9 записок/ и разобранным примером $H_3(q)$ /стр. 16 записок/.

6. Для каждого из идемпотентов в $H_3(q)$ постройте тождество для элементов Юциса-Мэрфи в $H_4(q)$.

Воспользовавшись этими тождествами, постройте идемпотенты в $H_4(q)$, отвечающие стандартным таблицам $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$.

7. Докажите Лемму 2 со стр 26–27 записок лекций, т.е. проверьте соотношения унитарности (9а) и уравнение Янга–Бакстера (9б) для бакстеризованных элементов $g_i(x)$ (8).

8. Постройте матрицы артиновых генераторов $H_5(q)$ g_i, $i=1,2,3,4$, в базисе, диагонализующем элементы Юциса–Мэрфи, для представлений, отвечающих диаграммам Юнга

 и 

дополнительная задача

9* Известна ещё одна серия конечномерных фактор-алгебр $\mathbb{C}[B_n]$ – алгебры Бирман–Мураками–Венцля $BMW_n(q,\mu)$. Артиновы генераторы g_i, $i=1\ldots n-1$ в этих алгебрах имеют кубический минимальный многочлен:

$$(g_i-q1)(g_i+q^{-1}1)(g_i-\mu 1)=0$$

Размерности этих алгебр $\dim BMW_n=(2n-1)!!$

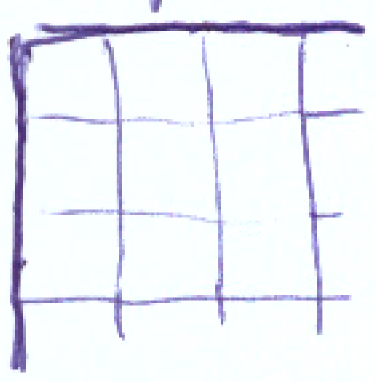
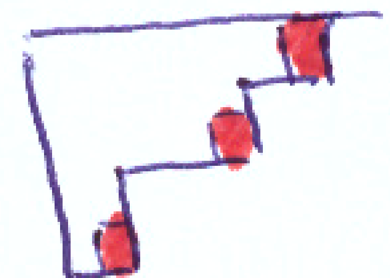
Алгебры Ивахори–Гекке $H_n(q)$ можно реализовать, как фактор-алгебры в $BMW_n(q,\mu)$: просто наложить на g_i более сильное условие

$$(g_i-q1)(g_i+q^{-1}1)=0.$$

Однако, их можно реализовать и как подалгебра в BMW_n (вложение $H_n(q) \subset BMW_n(q,\mu)$ нетривиально: артиновы генераторы g_i $H_n(q)$ будут сложными полиномами от артиновых генераторов g_i $BMW_n(q,\mu)$).

Правила индуцирования – редуцирования представлений в башне алгебр

$$BMW_1 \subset BMW_2 \subset \dots \subset BMW_n \subset \dots$$

тоже описываются с помощью комбинаторной процедуры последовательного "бросания" пронумерованных клеток $\boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{n}$ в квадрант . Клетки притягиваются к стенкам квадранта. В отличие от случая $H_n(q)$, клетка $\boxed{n}$ может не только "лечь" в один углов уже построенной конфигурации:  (помечены крестиком), но и "убить" одну из угловых клеток:  (закрашено красным цветом). /см. обсуждение в конце последней видео-лекции по алгебрам Гекке/.

Пользуясь описанной процедурой, постройте граф ветвления (диаграмму Братели) для алгебры $BMW_4(q,\mu)$ и определите размерности ее неприводимых представлений.

Rem: эта процедура работает только в случае, когда алгебра BMW полупроста.