Семинар 4.

Везде в задачах предполагается, что основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику $\neq 2$, а $X \subset \mathbb{P}^3$ - невырожденная квадрика по Штейнеру в $\mathbb{P}^3$.

Задача 1. Пусть a - произвольная точка в $\mathbb{P}^3$, не лежащая на X. Проведем произвольную плоскость τ через точку a, и рассмотрим конику $C = X \cap \tau$. Обозначим через p_aX и p_aC поляру точки a относительно квадрики X и коники C, соответственно.
1) Рассмотрим пару точек $\{b_1, b_2\} = C \cap p_aX$. Докажите, что прямая (b_1b_2) совпадает с прямой $p_aX \cap \tau$.
2) Докажите, что $p_aX \cap \tau = p_aC$.

Задача 2. В обозначениях задачи 1 рассмотрим конику $Y = p_aX \cap X$. Докажите, что для любой точки $b \in Y$ прямая (ab) лежит в плоскости $\mathbb{T}_bX$.

Задача 3. Докажите, что для произвольной точки $x \in \mathbb{P}^3$ условие $x \in p_aX$ равносильно условию $a \in p_xX$.

Задача 4. Докажите, что для произвольной точки $x \in \mathbb{P}^3$ верно равенство $p_aX = \mathbb{T}_aX$.

Задача 5. Пусть $a \notin X$ и $Y = p_aX \cap X$.
1) Докажите, что $a = \bigcap\limits_{b \in Y} \mathbb{T}_bX$.
2) Пусть плоскость π пересекает квадрику X по конике C. Докажите, что $\bigcap\limits_{b \in C} \mathbb{T}_bX$ - точка. Обозначим эту точку через a. Проверьте, что $p_aX = \pi$.