или $\mathbb{R}$

$$f \in L^2((-\pi,\pi); \mathbb{C})$$

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

в смысле $L^2((-\pi,\pi))$

$$c_k =: \hat{f}(k)$$

$$(1) \qquad \hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx$$

Достаточно $f \in L^1((-\pi,\pi))$.

$$|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)|$$

Компактные

(X,μ) $\mu(X)<+\infty$

$$L^\infty(X,\mu) \subset L^p(X,\mu) \subset \ldots \subset L^2(X,\mu) \subset L^1(X,\mu)$$

!). Что если $f \in L^1$ (а не L^2)? $\hat{f}$ определены.

А что с рядом?

•) $f \in C^k([-\pi,\pi]) \subset L^2((-\pi,\pi))$

Нет ли более сильной сходимости?

Как ведут себя коэфф.

•) $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $\qquad \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e^{ikx}$.

Когда это сход. (в каком-то смысле) ряд Фурье для какой-то функции?

(Да, если $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_k|^2 < +\infty$)

$$S_N(f,x) := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

$$|f(x) - S_N(f,x)| \xrightarrow[N\to\infty]{} ?$$

$$e_n(x) = e^{inx}$$

$$(f * e_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e_n(x-s)\, ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{inx} e^{-ins}\, ds =$$

$$= e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins}\, ds = e^{inx} \cdot 2\pi \hat{f}(n)$$

$$S_N(f,x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} 2\pi \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} (f * e_k)(x) =$$

$$= \Big(f * \underbrace{\Big(\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e_k\Big)}_{D_N(x)}\Big)(x) = (f * D_N)(x)$$

D_N - ядро Дирихле.

$$D_N(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \underbrace{e^{ikx}}_{\left(e^{ix}\right)^k} = e^{ix}\,\frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin N\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\, e^{i(N+1)\frac{x}{2}}$$

Д/з проверить счёт.

$$1-e^{ix} = e^{ix/2}\Big(\underbrace{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}_{-i\sin\frac{x}{2}}\Big)$$

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1+\sum_{k=1}^{N} e^{ikx}+\sum_{k=1}^{N} e^{-ikx} =$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{N}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) = 1+2\sum_{k=1}^{N}\cos kx$$

Д/з: проверить след.

1) $\sum\limits_{k=1}^{N} \cos kx = \operatorname{Re} \sum\limits_{k=1}^{N} e^{ikx} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left((2N+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.$

2) $D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum\limits_{k=1}^{N} \cos kx\right) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin (2N+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$

Св-ва: 1) $D_N(-x) = D_N(x)$

Отступление.

Числовой ряд. $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

1) $a_k \in \mathbb{C}$ (или $a_k \in \mathbb{R}$)

$S_N := \sum_{k=1}^{N} a_k$.

$\lim_{N\to\infty} S_N = a$.

(классич. понятие сходимости).

2) $\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ - наз. сходящимся по Чезаро (к } a) \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a \quad (\text{Cesaro}) \end{cases}$, если $\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Д/з: 1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a$ в обычном смысле $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a$ и в смысле Чезаро.

Тем не менее $a_k = (-1)^k$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 + (-1) + 1 + (-1) \dots \overset{\text{Чезаро}}{=} \frac{1}{2}$$

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 2k+1. \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

·) при фикс x в классическом см. (поточечно)

$$\lim_{N\to\infty} \Big| f(x) - \underbrace{(f * D_N)(x)}_{S_N(f,x)} \Big|$$

·) — " — по Чезаро.

$$\lim_{N\to\infty} \Big| f(x) - \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_N(f,x)}_{\text{" ??}} \Big| = \lim_{N\to\infty} \big| f(x) - (f * F_n)(x) \big|$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_N(f,x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f * D_N)(x) =$$

$$= \Bigg(f * \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_N\right)}_{=:\, F_N(x)}\Bigg)(x)$$

$$F_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_N(x)$$

ядро Фейера.

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin (2n+1)x/2}{\sin x/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \sin\frac{x}{2}}\;\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \sin (2n+1)\frac{x}{2} = \frac{1}{2\pi N}\,\frac{\sin^2 Nx/2}{\sin^2 x/2}$$

Д/З: проверить счёт.

$$\vee$$

$$\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{N} e^{i(2n+1)\frac{x}{2}}$$

1). $F_N(x) \geq 0$.

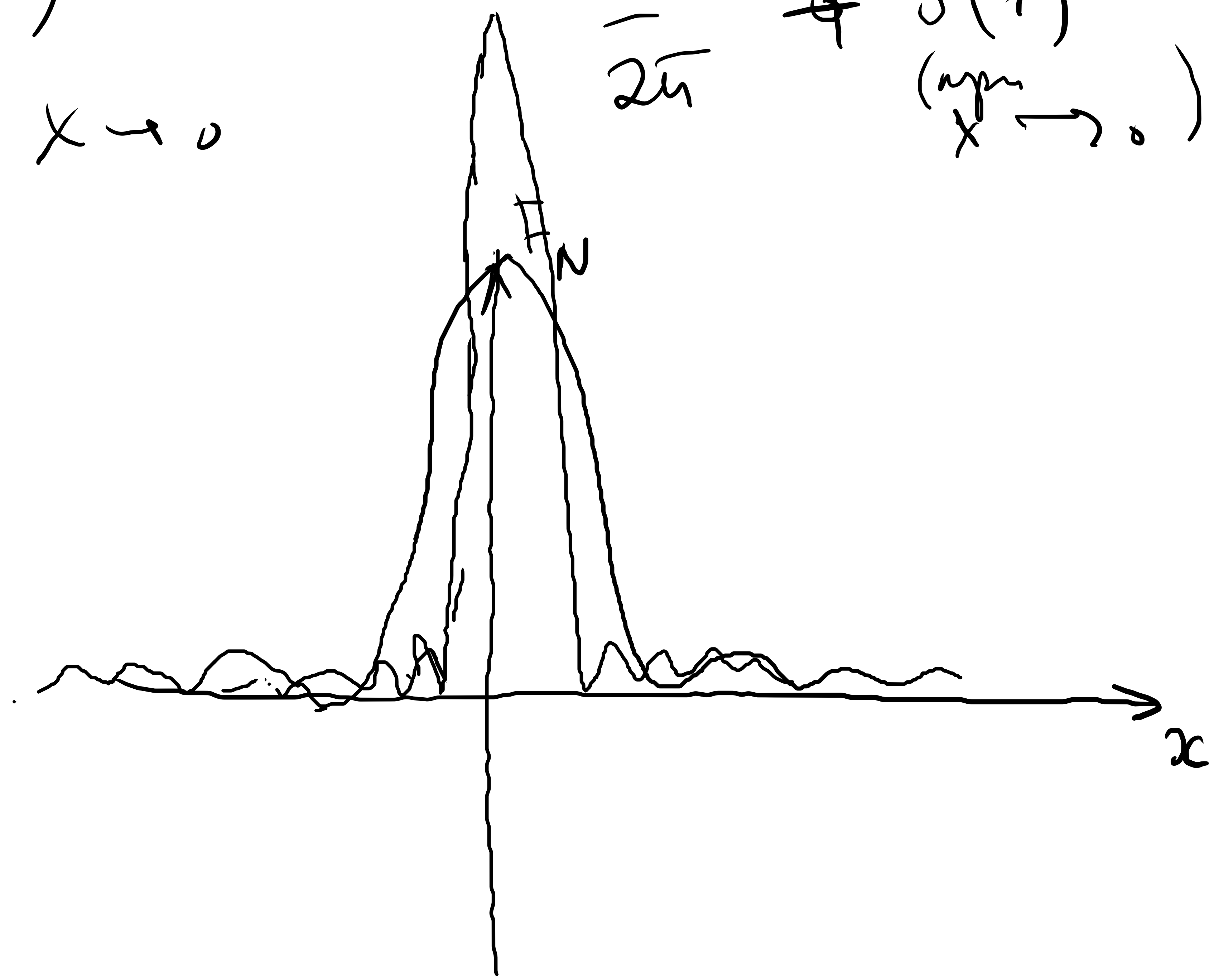
2). $x \to 0$

$$F_N(x) = \frac{1}{2\pi N}\,\frac{\left(N\frac{x}{2} + o(x)\right)^2}{\left(x/2 + o(x)\right)^2} = \frac{1}{2\pi N}\,\frac{N^2 \cancel{\frac{x^2}{4}} + \cancel{o(x^2)}}{\cancel{\frac{x^2}{4}} + \cancel{o(x^2)}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\left(N^2 + o(1)\right) = \frac{N}{2\pi} + o(1)$$

quand $x \to 0$ (quand $x \to 0$).

$$F_N(0) \simeq \frac{N}{2\pi}$$



o) $F_N(-x) = F_N(x)$

Поточечная сходимость ряда Фурье.

$f \in L^1(-\pi, \pi) \Rightarrow$ коэфф. $\hat{f}(k)$ определены.

$$\lim_{N\to\infty} \left| f(x) - (f * D_N)(x) \right| = ?$$

Lm. (Римана) $f \in L^1(-\pi,\pi) \Rightarrow$

$$\lim_{k\to\pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx}\,dx = 0.$$

Д-во: 2 шага. 1 шаг. $f \in C^1([-\pi,\pi])$

Тогда $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ikx}\, dx = \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\left(e^{ikx}\right) =$

$$= \underbrace{\frac{f(x)\, e^{ikx}}{ik}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{\to 0} - \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} f'(x)\, dx \longrightarrow 0$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} f'(x)\, dx\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|\, dx = C$$

2 man. $\quad f \in L^1(-\pi,\pi)$.

$\forall \varepsilon > 0 \qquad f_\varepsilon \in C^1([-\pi,\pi])$

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^1} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx\right| \le \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,\underbrace{|\cancel{e^{ikx}}|}_{=1.}\,dx}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left|\int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(x)e^{ikx}\,dx\right|}_{\le \frac{\varepsilon}{2},\ \text{ecm } |k|>N = N(\varepsilon)}$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(x)e^{ikx}\,dx\right| \xrightarrow[k\to\pm\infty]{} 0$$

$|k| > N(\varepsilon)$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx\right| \le \varepsilon.$$

Имеем тогда, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ikx}\, dx = 0$,

т.к. g.

Замечание. $\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx = 0. \\ \text{——— " ———} \quad \cos kx\, dx = 0. \end{cases}$

$$(f * D_N)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, D_N(\underbrace{s-x}_{y})\, ds =$$

bee pelmo $s-x$ come $x-s$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= s-x \\ s &= y+x \end{aligned}}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x)\, D_N(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y+x)\, \frac{\sin (2N+1)\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\, dy$$

$$f(x) - (f * D_N)(x) = f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x)\, \frac{\sin (2N+1)\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\, dy$$

Упражнение. (Ф|3) $\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{D_N(x)\,dx} = 1.$

$$\| \quad \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\cancel{\cos x} + \frac{1}{\pi}\cancel{\cos 2x} + \ldots + \frac{1}{\pi}\cancel{\cos Nx}$$

$$f(x) - (f * D_N)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - f(x+y)\big) D_N(y)\,dy$$

Наблюдение.

$$\left(\int_{\delta}^{\pi} + \int_{-\pi}^{-\delta}\right)\Big(\;\_\_\_\_\; \text{''} \;\_\_\_\_\; \text{''} \;\_\_\; \Big) \to 0$$

$$n \to 0.$$

Принцип локализации.