(X, μ) (Y, ν)

$L^2(X, \mu)$ $L^2(Y, \nu)$

$\{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ $\{\psi_k\}_{k=1}^{N}$ $N \leq \infty$

полные, ортонормир

$L^2(X \times Y, \mu \otimes \nu)$.

Задача 1 $\Big\{$ Д-ть $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}_{k,l} \subset L^2(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ полная ортонорм. сист.

Задача 2. Привести примеры полных ортогон. (ортонорм) систем в $L^2\left([0,\pi]^2\right)$

Решение $\rightarrow$ 1). $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ – полн. ортог. в $L^2([0,\pi])$

одним из возможных примеров.

$\varphi_k = \sin kx \qquad \psi_l = \sin lx$

$$f_{kl}(x,y) = \sin kx \sin ly$$

$\{f_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ – полная ортогон. сист. в $L^2\left([0,\pi]\times[0,\pi]\right)$

$$g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g_{kl} \sin kx \sin ly$$

$$g_{kl} \in \mathbb{R}$$

$$g_{kl} = \frac{\int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} dy \; g(x,y) \sin kx \sin ly}{\int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} dy \sin^2 kx \sin^2 ly}$$

Знаменатель $= \int_0^{\pi} \sin^2 ly \, dy \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

$$\boxed{g_{kl} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi dx \int_0^\pi dy \; g(x,y)\sin kx \sin ly}$$

$$g \in L^2([0,\pi]\times[0,\pi])$$

проверьте (!)

$$\boxed{\|g\|_2^2 = \frac{\pi^2}{4}\sum g_{kl}^2}$$

равенство Парсеваля

(= теор. Пифагора)

•). $\varphi_k = \sin kx \qquad \psi_l = \cos lx.$

$$g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_{kl} \sin kx \cos ly$$

Решение задачи 1.

$(x,y) \longmapsto \varphi_k(x)\,\psi_l(y)$ полная ортонорм. система.

$\uparrow$

$f_{kl}(x,y)$

$$\underline{1^\circ}\ \iint\limits_{X\times Y} f_{kl}(x,y)\, f_{mn}(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) =$$

$$= \iint\limits_{X\times Y} \underline{\varphi_k}(x)\,\psi_l(y)\,\underline{\varphi_m}(x)\,\psi_n(y)\,d\underline{\mu}(x)\,d\nu(y) =$$

$$= \int\limits_X \varphi_k(x)\,\varphi_m(x)\,d\mu(x) \cdot \int_Y \psi_l(y)\,\psi_n(y)\,d\nu(y)$$

$$= \delta_{km} \cdot \delta_{ln} =$$

$$= \begin{cases} 1, & (k,l) = (m,n) \\ & (\text{т.е. } k = l \Leftrightarrow m = n) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

т.е. ортонормир. доказано

<u>2°</u> Полнота (= замкнутость)

Дост. д-ть, что

$$\{\varphi_k \otimes \psi_l\}_{k,l}^{\perp} = \{0\}. \qquad (*)$$

Проверим $(*)$

$$f \perp \varphi_k \otimes \psi_l \qquad \forall k, l.$$

$$f = f(x,y) \in L^2(X\times Y, \mu\otimes\nu)$$

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\psi_k(x)\,\varphi_l(y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = 0$$

полная система

$$\rho_l(x) := \int\limits_Y f(x,y)\,\varphi_l(y)\,d\nu(y)$$

$$\underbrace{\int\limits_X \rho_l(x)\,\psi_k(x)\,d\mu(x)}_{=\,0} \iff \rho_l \perp \psi_k \quad \forall k \quad (\in L^2(X,\mu))$$

$$(\forall l) \qquad \Downarrow$$

$$\rho_l = 0 \qquad (\text{т.е. } \rho_l(x) = 0 \text{ для } \mu\text{-п.в. } x \in X)$$

$$\forall \ell \qquad \rho_\ell(x) = \int_Y f(x,y)\,\varphi_\ell(y)\,d\nu(y) = 0 \qquad \mu\text{-a. e. } x.$$

$$\Big(\text{i.e.} \quad \exists\ E_\ell \subset X, \quad \mu(E_\ell) = 0,$$

$$\rho_\ell(x) := \int_Y f(x,y)\,\varphi_\ell(y)\,d\nu(y) = 0 \qquad \forall x \in X \setminus E_\ell\Big)$$

$$E := \bigcup_\ell E_\ell \qquad \boxed{\rho_\ell(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus E}$$

(!) $\boxed{\mu(E) = 0.}$

зафиксируем $\underline{\text{произв.}}$ $x \in X \setminus E$

$$\int\limits_Y f(x,y)\,\varphi_l(y)\,d\nu(y) = 0 \qquad \forall l$$

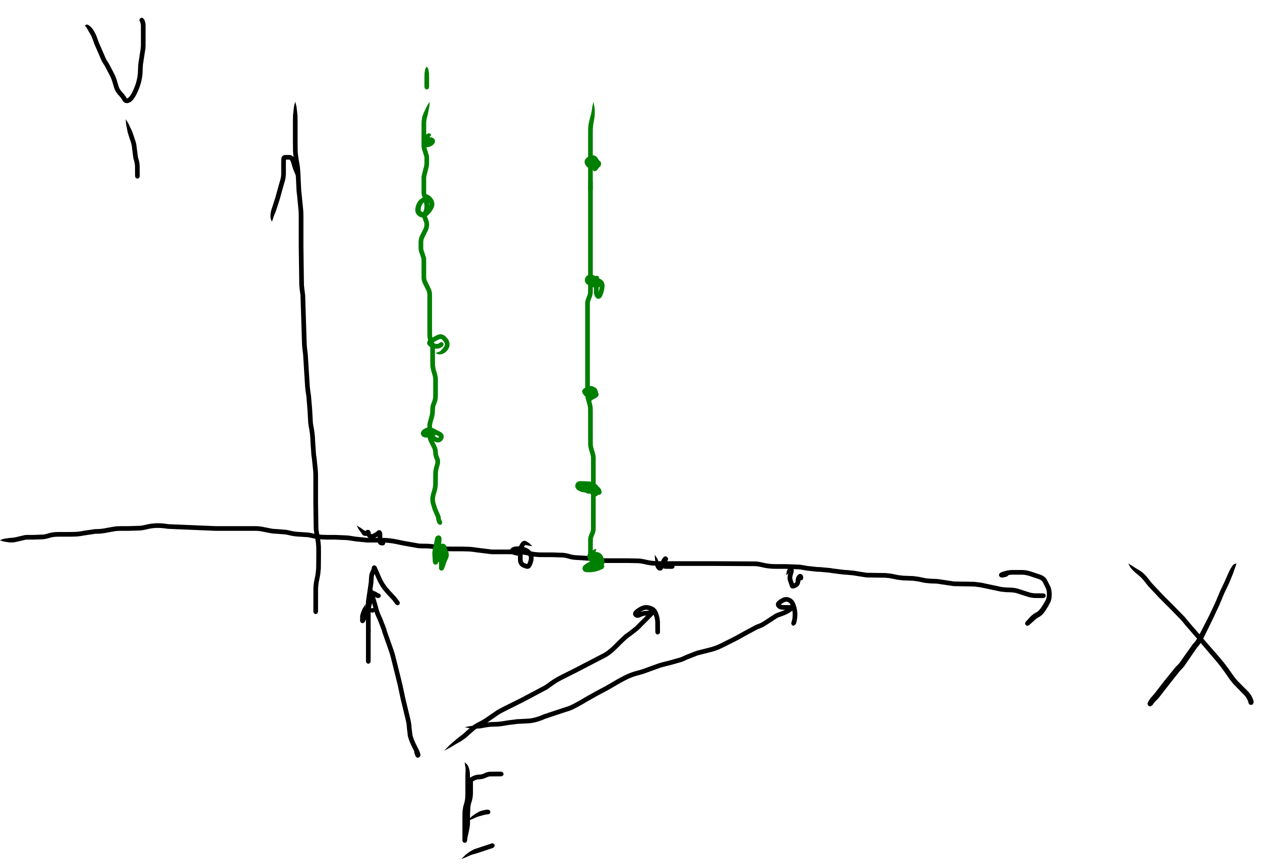
$L^2(Y,\nu)$

$\{\varphi_l\}$ полная $\Rightarrow f(x,\cdot) \perp \{\varphi_l\}$

$\Rightarrow$ (1) $f(x,y) = 0$ ν-п.в. y

$\Downarrow$ ← $\underline{\text{почему}}$?

(1') $f(x,y) = 0$ $\mu\otimes\nu$-п.в. (x,y)



(1): $\forall x \in X \setminus E \quad (\mu(E)=0) \quad \exists D_x \subset Y \quad \nu(D_x)=0$ и $f(x,y)=0 \quad \forall y \in Y \setminus D_x$

$\Updownarrow$

Теор. Фубини.

(!)

$(1')$: $\exists \Sigma \subset X \times Y \quad \mu \otimes \nu(\Sigma)=0$ и $f(x,y)=0 \quad \forall (x,y) \in (X \times Y) \setminus \Sigma$

Д/З: проверить, что связка правильная

$$f \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \qquad c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} \qquad c_k =: \hat{f}(k)$$

1) $f(\cdot) \in \mathbb{R}$ $\qquad \hat{f}(k)$

2) $f(\cdot) \in \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = f(-x)$

3) $f(x) = -f(-x)$

Решение.

1). $f(x) = \overline{f(x)} = \overline{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{-ikx}} = \overline{\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(-m) e^{imx}}$

$\parallel$

$\sum_k \hat{f}(k) e^{ikx}$

$k = -m.$

$(m = -k)$

$$\hat{f}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$$

2). $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

$$\|$$

$$f(-x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, e^{-ikx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(-m)\, e^{imx}$$

$$m := -k$$

$$\hat{f}(k) = \hat{f}(-k).$$

а если $f(\cdot) \in \mathbb{R}$, то

$$\ldots = \hat{f}(-k)$$

$$\hat{f}(k) = \hat{f}(-k) \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} \underset{\hat{f}(k)}{\underset{\parallel}{\hat{f}(-k)}} e^{-ikx} =$$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) =$$

$$= \hat{f}(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) \cos kx$$

3). $f(x) = -f(-x)$.

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} = -f(-x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\hat{f}(k) e^{-ikx}\right) =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(-\hat f(-m)\right) e^{imx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f(k)\, e^{ikx}$$

из начала

$m := -k$

$$\hat f(k) = -\hat f(-k) \qquad \forall k\in\mathbb{Z}$$

А если кроме того, ещё и $f(\cdot)\in\mathbb{R}$

$$\hat f(k) = \overline{\hat f(-k)} = -\hat f(-k) \Rightarrow \mathrm{Re}\,\hat f(\cancel{-k}\;k) = 0$$

потому что $f(\cdot)\in\mathbb{R}$

потому что нечет.

$$\hat f(k) = i c_k \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

$$\hat f(-k) = -\hat f(-k) \qquad c_k = -c_{-k}. \qquad \left(\text{в частности, } c_0 = 0\right)$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f(k) e^{ikx} = i\left(\sum_{k=1}^{\infty} \cancel{c_{-k}}^{\,-c_k} e^{-ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx}\right) =$$

$$= i \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cancel{\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)}^{\,= i2\sin kx} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$$

Задача 4. а)

$f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, $\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx$ $\Big| f \in L^1(-\pi,\pi)$

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$ (абс. сход. ряд Фурье)

Д-ть, что $\Big\{ f \in C([-\pi,\pi];\mathbb{C})$

$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$ в смысле $\rightrightarrows$ в C

(значит, в частности, и в L^p).