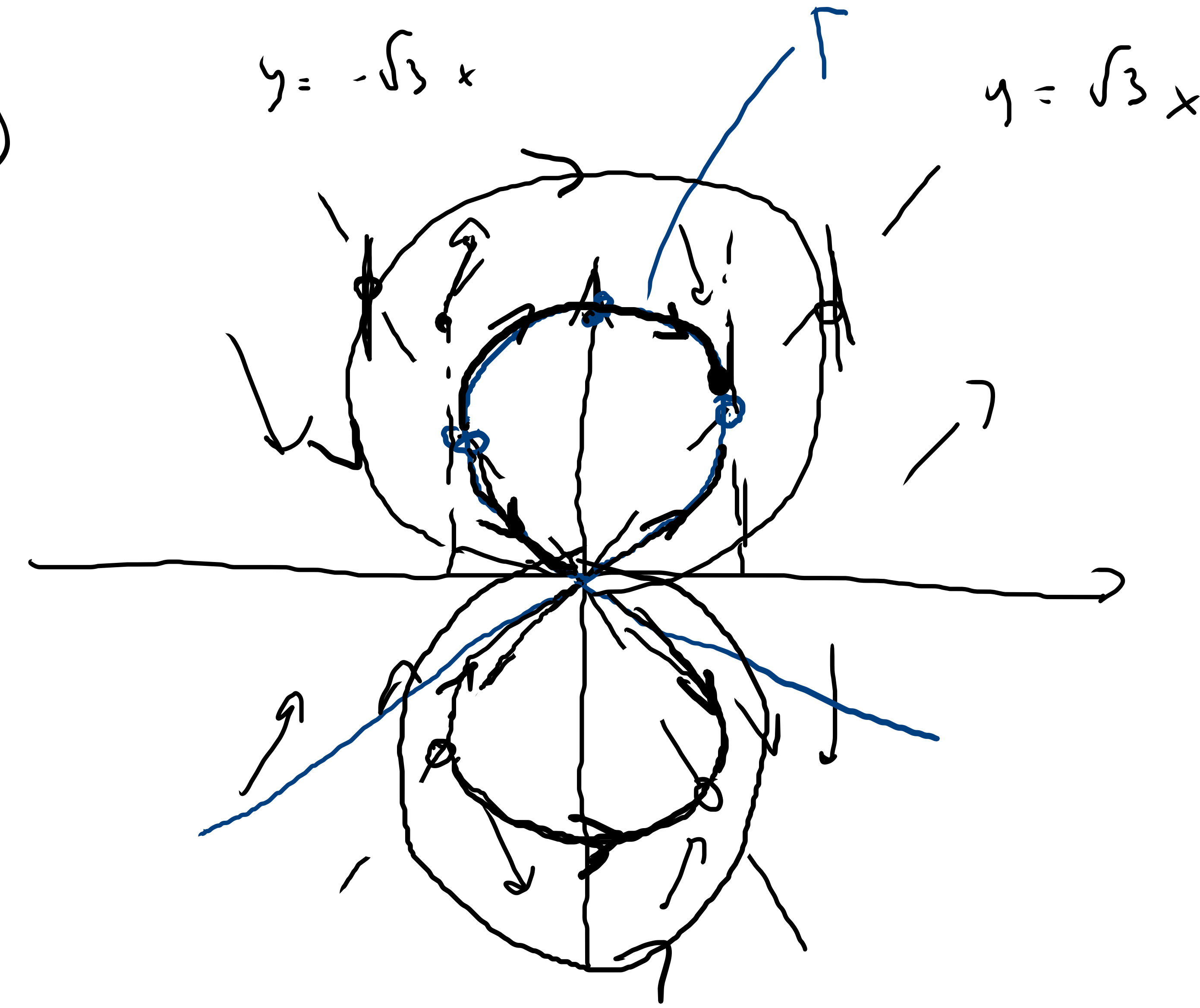
Задача 1 (с прошлого семинара)

(1) $$\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}y' = 0.$$



(2) $$y' = -\frac{2xy}{y^2-3x^2}$$

Решение

•) Симметрия: $z(x) := -y(-x)$

$$z' = y'(-x) = -\frac{2(-x)y(-x)}{y^2(-x)-3(-x)^2} = -\frac{2xz(x)}{z^2(x)-3x^2}$$

•) Картина траекторий симм. отн. O.

$$\underbrace{\frac{2x}{y^3}\,dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy}_{df(x,y)} = 0$$

$2x/y^3 \qquad (y^2-3x^2)/y^4$

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.}$$

$$f(x, y(x)) = C.$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$C(x_0, y_0) := \frac{x_0^2}{y_0^3} - \frac{1}{y_0}.$$

Конкр случай $x_0 = 0,\ y_0 = 1$.

$$C = -1.$$

(Д/З : все случаи).

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = -1.$$

N.B. $(x, y) \in \Gamma$

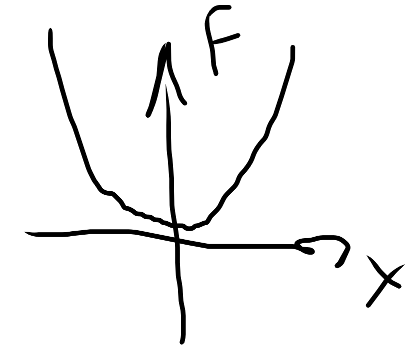
$\Downarrow$

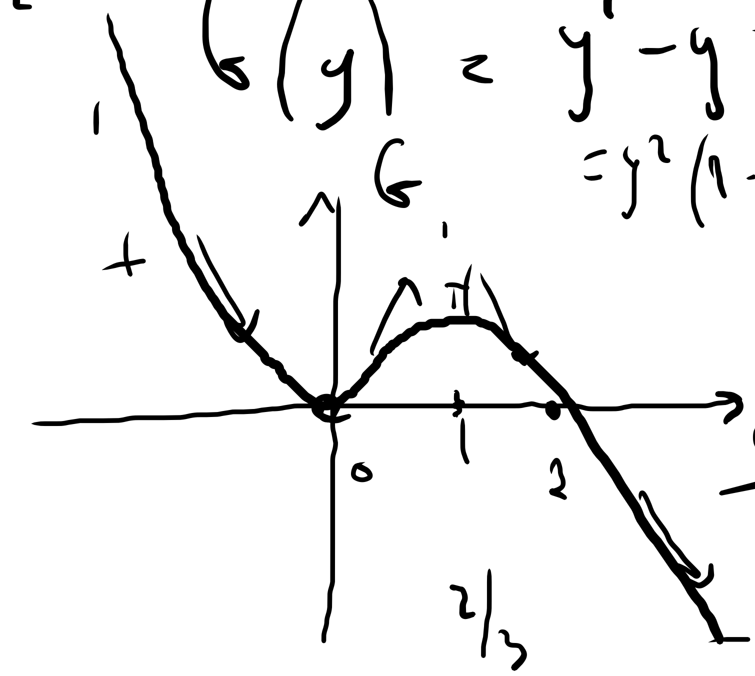
$(-x, y) \in \Gamma$

Γ: $$\boxed{x^2 = y^2 - y^3}$$

$F(x) = G(y)$

$F(x) = x^2$ $\quad G(y) = y^2 - y^3 = y^2(1-y)$





$y > 0 \Rightarrow x^2 = G(y)$.

$x^2 \le \frac{4}{27} \iff -\frac{2}{3\sqrt{3}} \le x \le \frac{2}{3\sqrt{3}}$

$(0 \le y \le 1)$.

$G'(y) = 2y - 3y^2 =$

$= y(2 - 3y)$

max $\rightsquigarrow G(2/3) = 4/27$.

$0 \le x \le \frac{2}{3\sqrt{3}}$

(остается из симметрии).

$x \to 0^+ \Rightarrow y \to 0 \quad (y < \frac{2}{3})$

$x \to 0^+ \Rightarrow y \to 1 \quad (y > 2/3)$

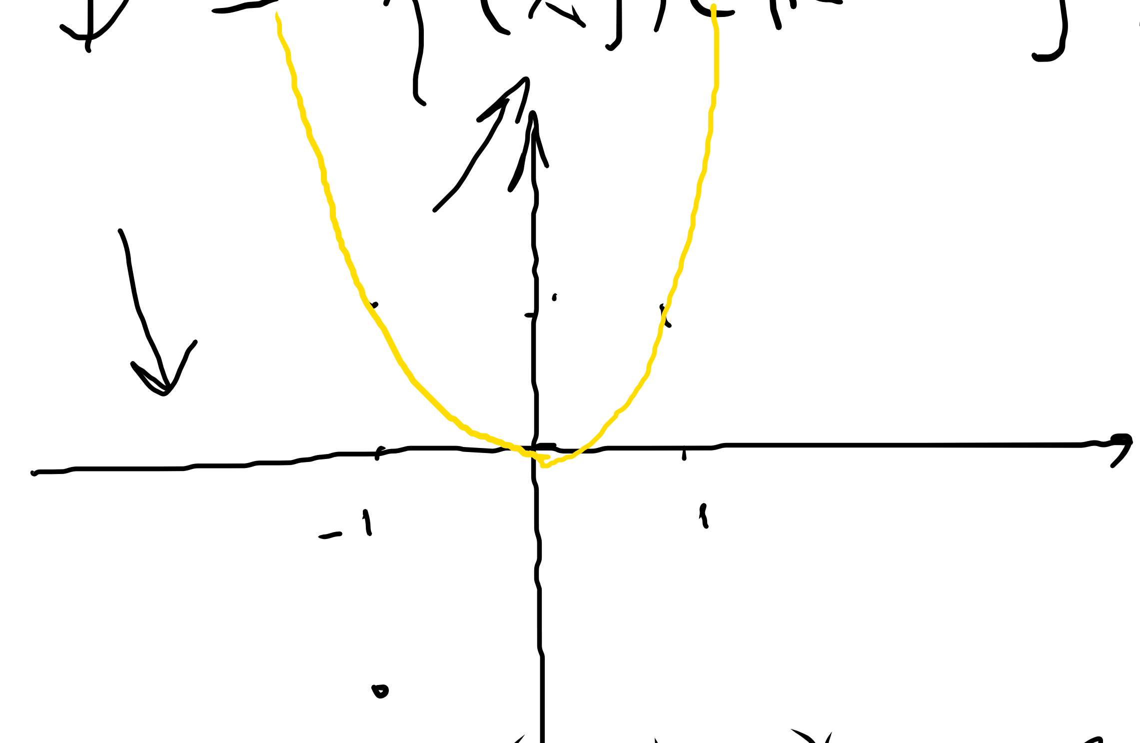
Задача 2.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y - x^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(\cdot) \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{1}{y - x^2}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$$



Сл. 1. $y_0 > x_0^2$

Д/З $\rightsquigarrow$ Сл. 2. $y_0 < x_0^2$

Реш. 1). loc $\exists$.

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $\exists$, непр. в окр. любой $(x,y) \in D$ $\Rightarrow$ единств

3). $y' > 0 \iff y > x^2$

$y' < 0 \iff y < x^2$

($y \neq 0$ нигде на D)

4). Сл. 1 $y_0 > x_0^2 \Rightarrow y > x^2 \Rightarrow y \uparrow$.

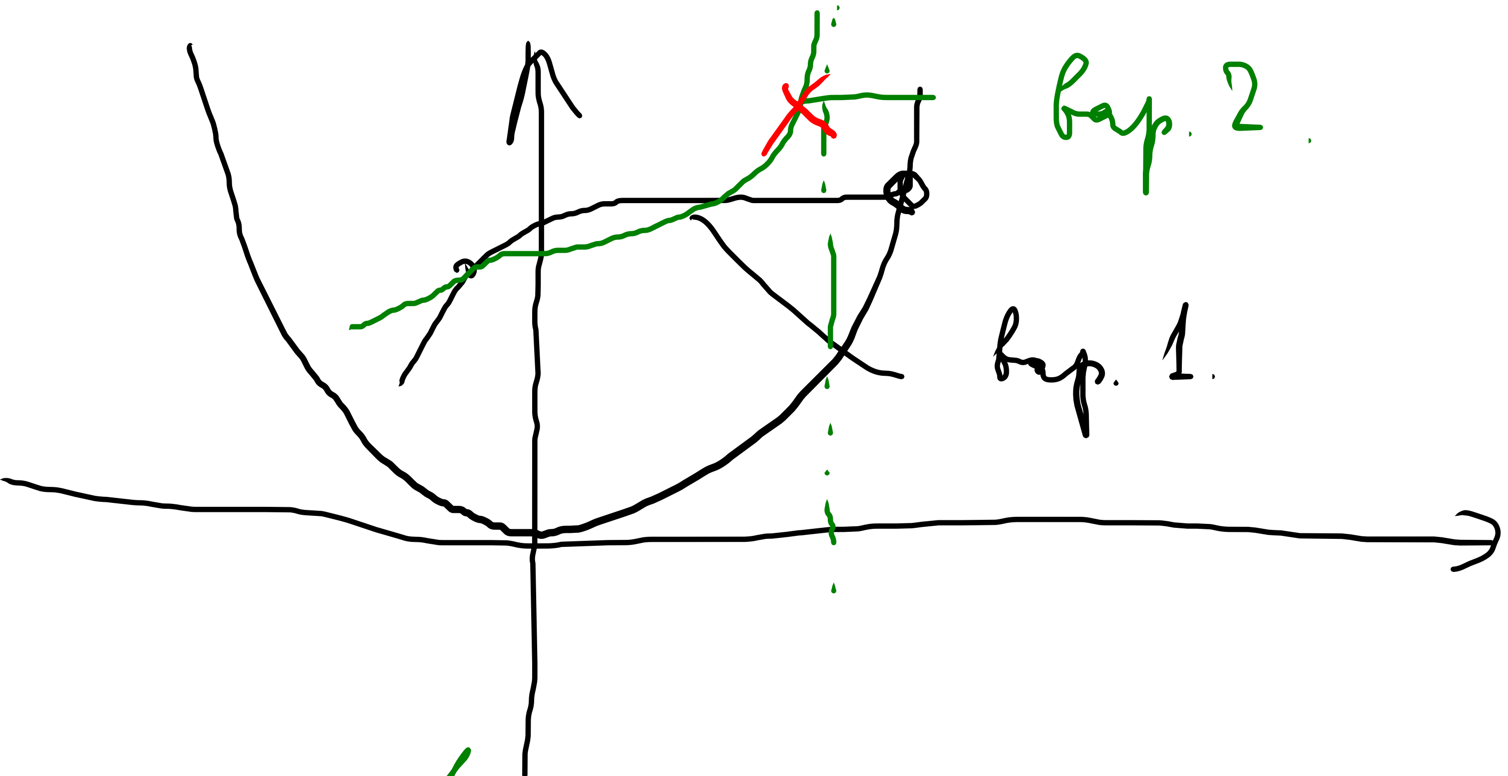
Интервал $\exists$ реш. (a, b), где $a = \varphi(x_0, y_0)$

$b = b(x_0, y_0)$

4.1) Чему м.б. равен b?

4.1.1). b конечно ($b \in \mathbb{R}$)?

$x \to b - 0$



вар. 2 $\quad x \to b - 0$

$y(x) \to +\infty.$

$$y' = \frac{1}{y - x^2} \to 0$$

$y - x^2 \to +\infty$

Отгадка: это невозможно!

$y' \to 0 \quad \Rightarrow \quad |y'| \leq C.$

$-C \leq y' \leq C$

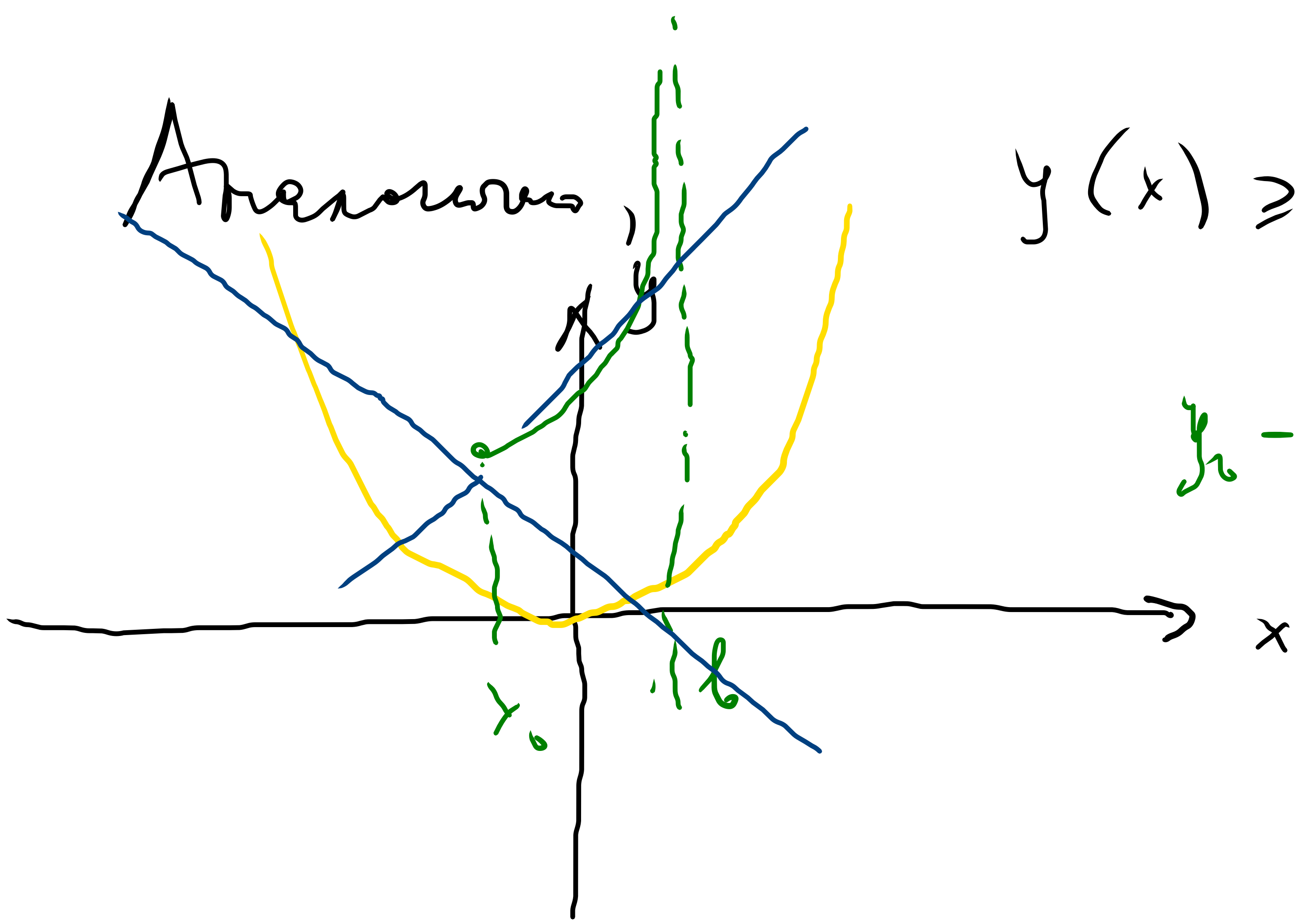
$y' \leq C$

$y' \geq -C.$

$$\begin{cases} y' \le C \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = C \\ z(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad z(x) = y_0 + C(x - x_0)$$

Нер-во Чаплыгина:
$$y(x) \le z(x) = y_0 + C(x - x_0)$$
$$x \ge x_0$$

Аналогично,



$$y(x) \ge y_0 - C(x - x_0).$$

$$y_0 - C(x - x_0) \le y(x) \le y_0 + C(x - x_0)$$

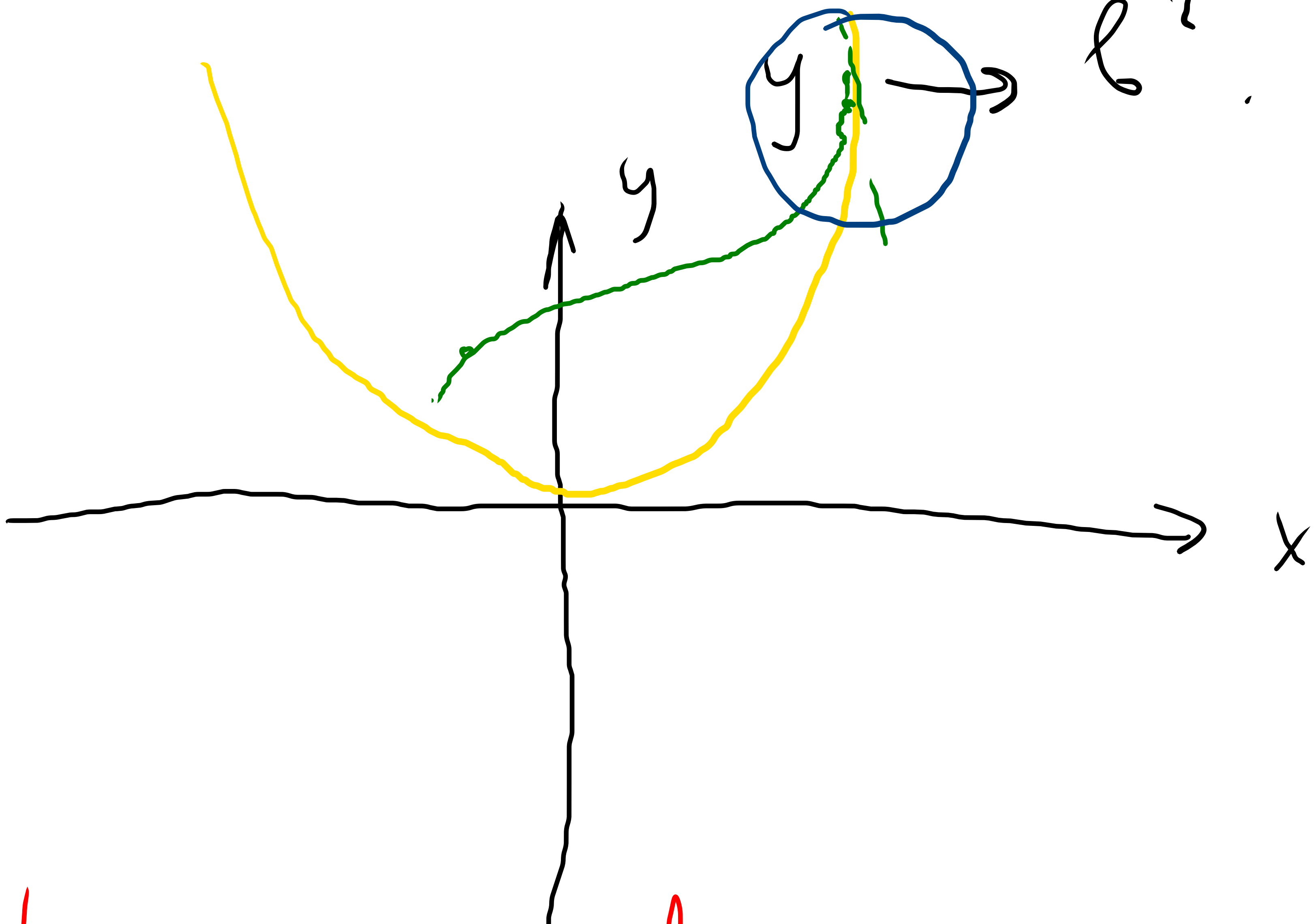
противоречие $\Rightarrow$ вар 2) невозможен.

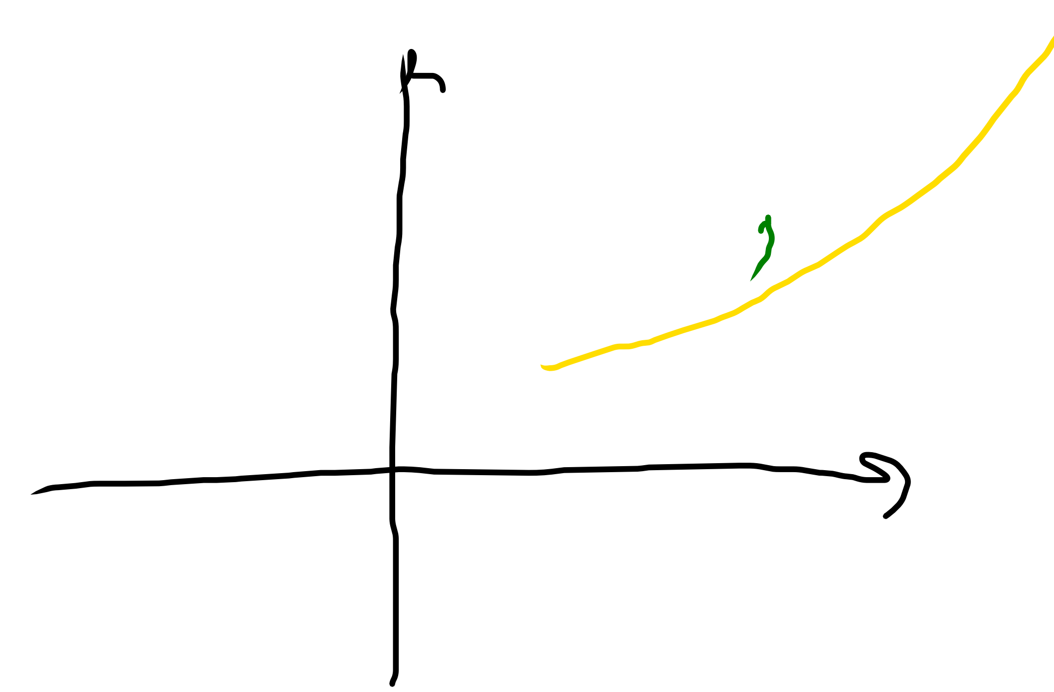
вар 1.

$x \to b - 0.$

$y \to b^2.$

$|y'| = \dfrac{1}{y - x^2} \to +\infty$





Гипотеза: наверное, это тоже невозможно.

Д-во (от противного)

$$y(x) > x^2$$

$$y(x) - b^2 > x^2 - b^2$$

$$\frac{y(x) - b^2}{x - b} < \frac{x^2 - b^2}{x - b} \qquad x < b$$

$$\lim_{x \to b-0} \frac{y(x) - b^2}{x - b} \le \lim_{x \to b-0} \frac{x^2 - b^2}{x - b} = \lim_{x \to b-0} (x + b) = 2b$$

$$y(x) \to b^2$$

L'Hôpital

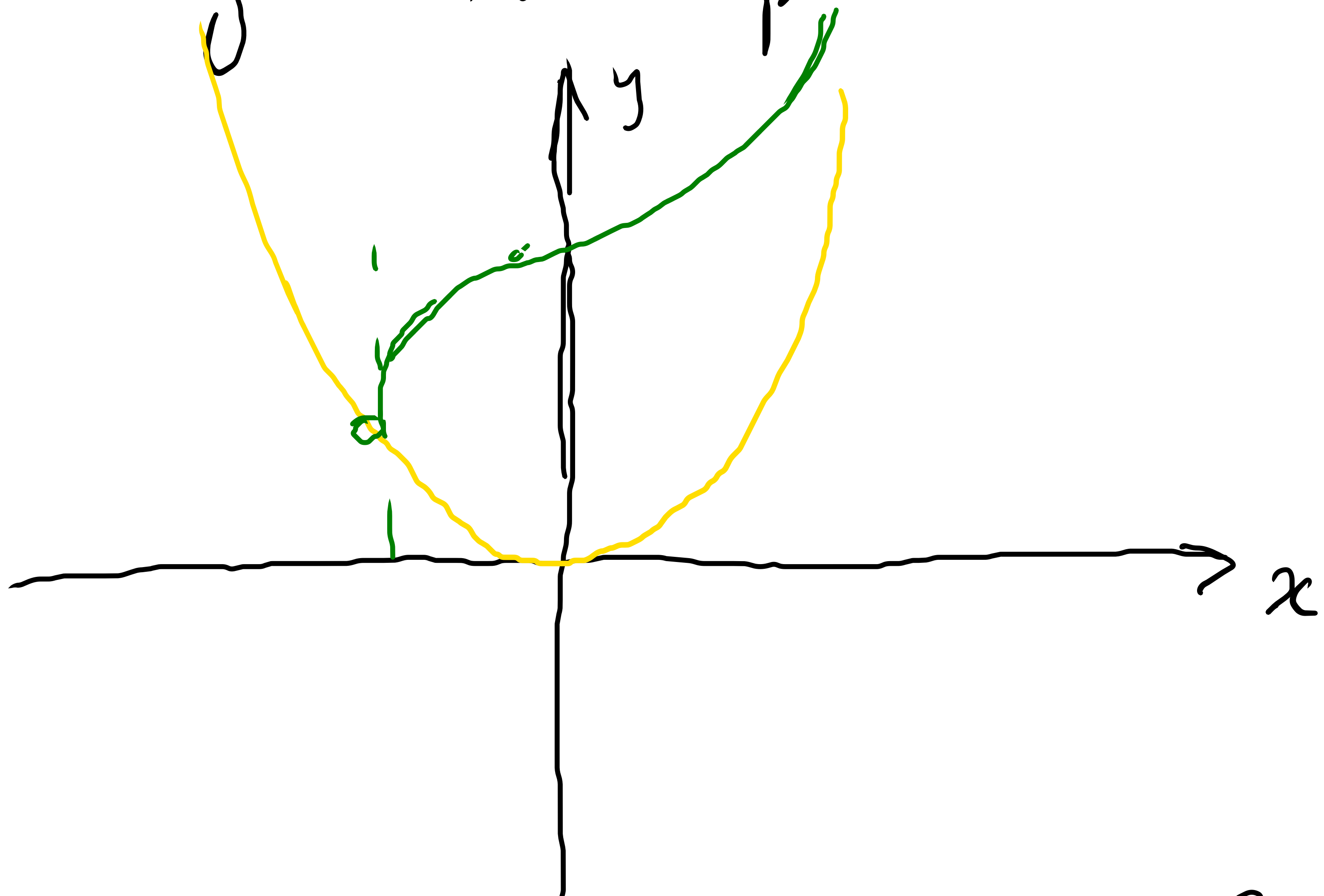
$$\lim_{x \to b-0} \frac{y'(x)}{1} = \lim_{x \to b-0} y'(x) = +\infty$$

Противоречие!

$\Rightarrow$ вар 1 тоже невозможен.

Сл-но $b = +\infty$.

4.2) Чему м.б. равен a?



$x \to a+0$

$y(x) \to a^2$.

$y'(x) \to +\infty$

5) $x \to +\infty$ $\quad y(x) > \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \Rightarrow y \to +\infty$

б) $$y'' = -\frac{1}{(y-x^2)^2}\left(y'-2x\right) = \left| \; y' = \frac{1}{y-x^2} \right.$$

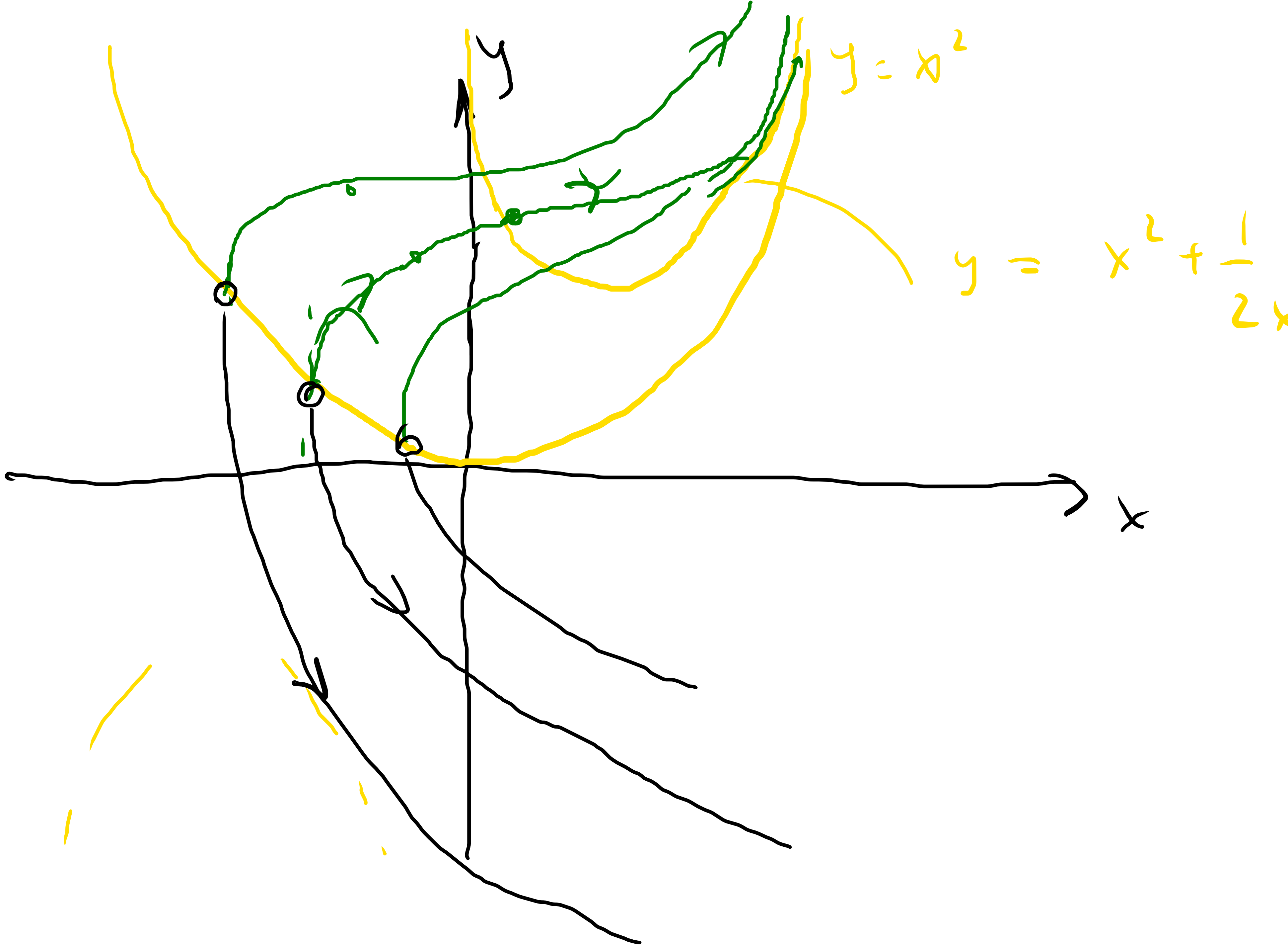
$$= -\frac{1}{(y-x^2)^2}\left(\frac{1}{y-x^2} - 2x\right) =$$

$$= -\frac{1}{(y-x^2)^3}\left(1-2x\left(y-x^2\right)\right)$$

Мы рассм. случай $y > x^2$.

$$y'' > 0 \iff 1 - 2x\left(y-x^2\right) > 0$$

$$2x\left(y-x^2\right) < 1 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < x^2 + \frac{1}{2x} \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y > x^2 + \frac{1}{2x} \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Max Uniepb. $\exists$:

$]a(x_0, y_0), +\infty)$