Краткий справочник по теории

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $\quad f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) \in D$.

1) Лок. существование $\Leftarrow$ $f \in C(D; \mathbb{R}^n)$

2) Единственность $\Leftarrow$ $\underline{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le K|y_1 - y_2|}$ в окр. точки (x_0, y_0)

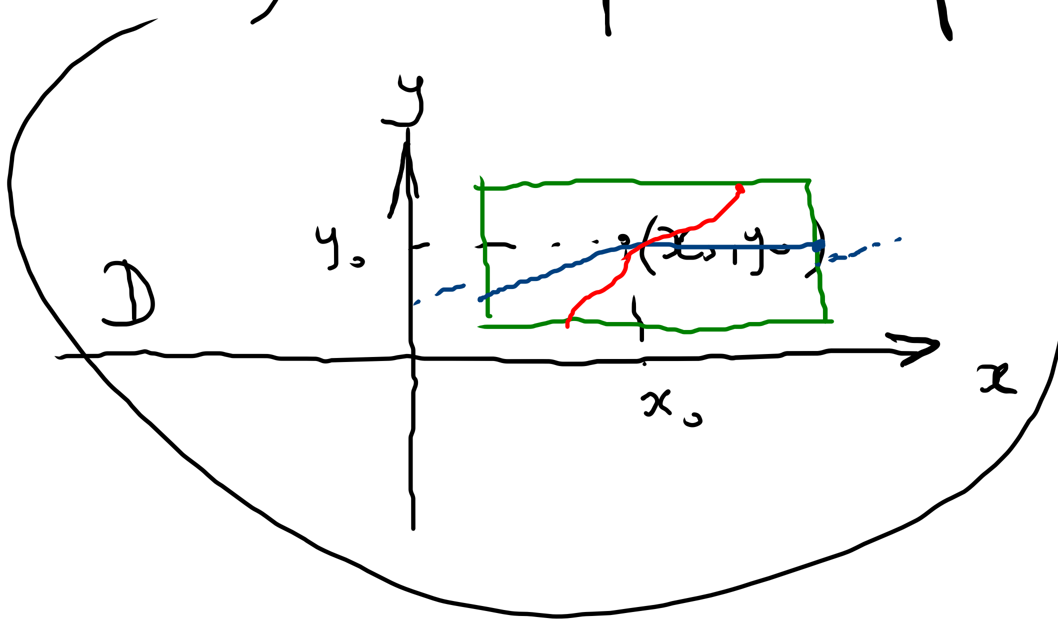
3) Интервал $\exists$ реш.:

- $\exists$ max. интервал (a, b), на котором опред. решение
- $|y(x)| \le C \quad \forall x \Rightarrow$ реш. опред. глобально

$|f(x,y)| \le C \quad \forall x \forall y$ —"— —

$|f(x,y)| \le A|x| + B \quad \forall x \forall y$ —"— —

$A, B, C > 0$



Пример.

$$(1)\quad \begin{cases} y' = |y - x| \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad y(\cdot) \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \qquad / D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} /,\quad x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R}.$$

Решение.

0° Напрашивается подстановка

$$z(x) := y(x) - x. \quad \Rightarrow \quad y(x) = z(x) + x.$$

$$y' = z' + 1.$$

$$z' + 1 = |z| \quad \Rightarrow \quad (2)\ \begin{cases} z' = |z| - 1. \quad \leftarrow \text{автономное Д.У.} \\ z(x_0) = z_0 := y_0 - x_0 \end{cases}$$

(!)

1°

$$\begin{cases} z' = |z| - 1 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

1). Все существ. реш

2) $f(x, z) := |z| - 1$.

$$\left| f(x, z_1) - f(x, z_2) \right| = \left| |z_1| - 1 - (|z_2| - 1) \right|$$

$$= \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq 2 |z_1 - z_2|$$

$$(K := 2)$$

решение единственно.

($\Rightarrow$ Траектории нигде не пересекаются).

2°

Стац. решения $z(x) = C$.

$$0 = z' = |c| - 1.$$

$$\Updownarrow$$

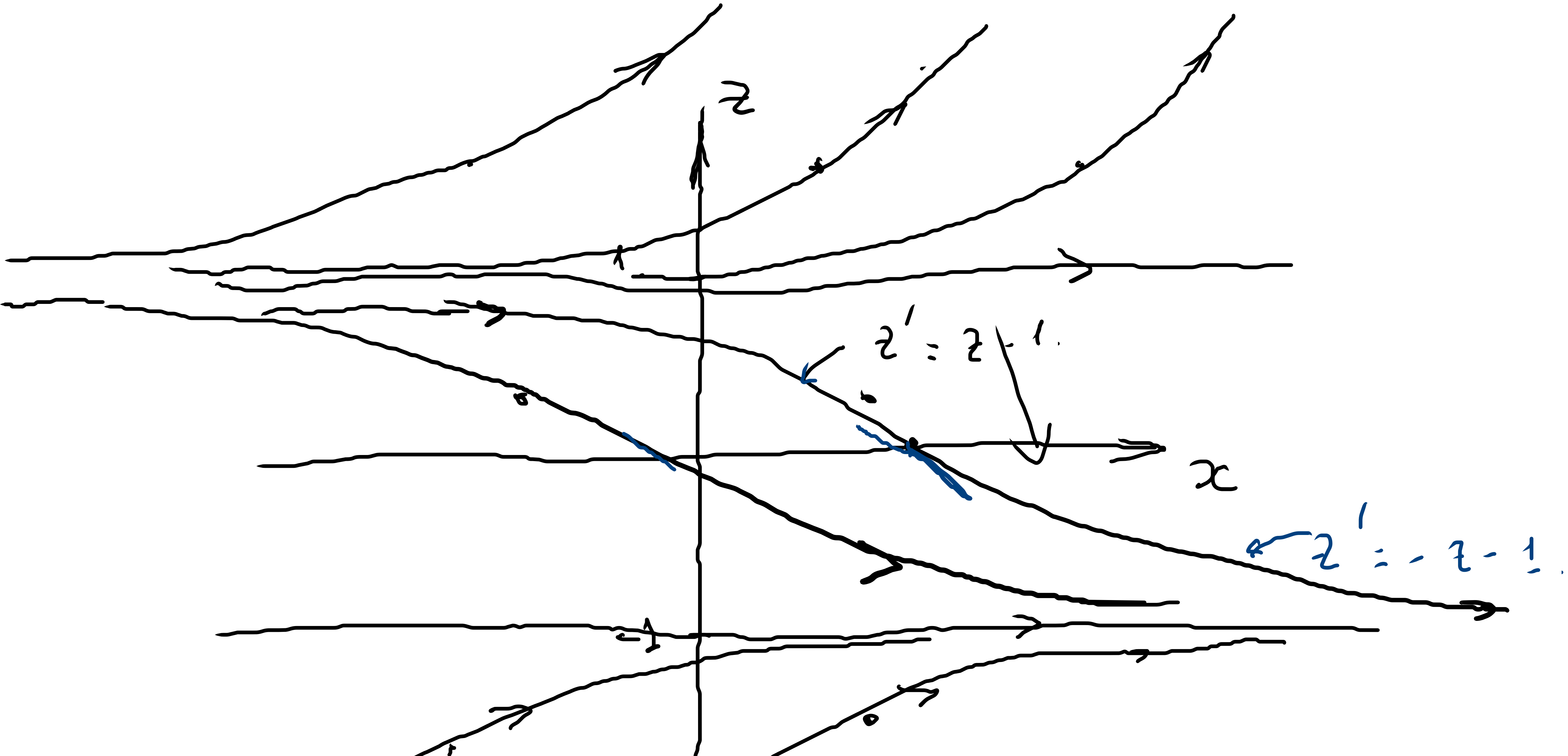
$$|c| = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$C = \pm 1.$$

Итого 2 стац. решения: $z(x) = 1$.

$z(x) = -1$.



Сл. 1. $z_0 > 1 \Rightarrow z(x) > 1 \Rightarrow |z| = z$.

$$\begin{cases} z' = z - 1 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

$$z(x) = 1 + (z_0 - 1)\, e^{x - x_0}$$

опред. на $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} z(x) = 1$, ← гориз. асимптота.

$\lim\limits_{x \to +\infty} z(x) = +\infty$.

Сл 2. $z_0 < -1 \Rightarrow z(x) < -1 \Rightarrow |z| = -z.$

$$\begin{cases} z' = -z - 1 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases} \Rightarrow \quad z(x) = -1 + (z_0 + 1)e^{-(x-x_0)}$$

реш. опред. на $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} z(x) = -1. \longleftarrow \text{гориз. асимптота.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} z(x) = -\infty$$

Сл. 3, 4. (вырожд.) $z_0 = \pm 1 \Rightarrow z(x) = \pm 1$

Сл 5. $-1 < z_0 < 1. \Rightarrow -1 < z(x) < 1 \Rightarrow$ реш. опред. на $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow z' < 0 \Rightarrow z$ - убыв. функция. $\Rightarrow$

по теор. Вейерштрасса

$$\exists \lim_{x\to+\infty} z(x) =: \overline{\ell} \cancel{(x_0, z_0)}$$

$$\exists \lim_{x\to-\infty} z(x) =: \underline{\ell}(x_0, z_0)$$

я придумал ~~может зависеть~~

Как найти $\overline{\ell}$?

теор. Лагранжа

$$0 \leftarrow z(k+1) - z(k) = z'(\xi_k)((k+1)-k) =$$

$$z(k+1) \to \overline{\ell}, \quad z(k) \to \overline{\ell}$$

$k \in \mathbb{N}$ $\quad \xi_k \in [k, k+1]$

(при $k \to +\infty$)

$$= z'(\xi_k) =$$

$$k \le \xi_k < k+1$$

$$k \to +\infty, \quad \xi_k \to +\infty, \quad k+1 \to +\infty$$

$$= |z(\xi_k)| - 1 \to |\overline{\ell}| - 1, \quad z(\xi_k) \to \overline{\ell}$$

$|\bar{l}| - 1 = 0 \Rightarrow \bar{l} = \pm 1 \Rightarrow \bar{l} = -1.$

Для $\underline{l}$ — аналогично: $\underline{l} = +1.$

Упущенные возможности (хорошо бы реализовать в rotate D/3):

1). $\hat{z}(x) := -z(-x)$

$$\hat{z}'(x) = z'(-x) = |z(-x)| - 1 = |\hat{z}(x)| - 1.$$

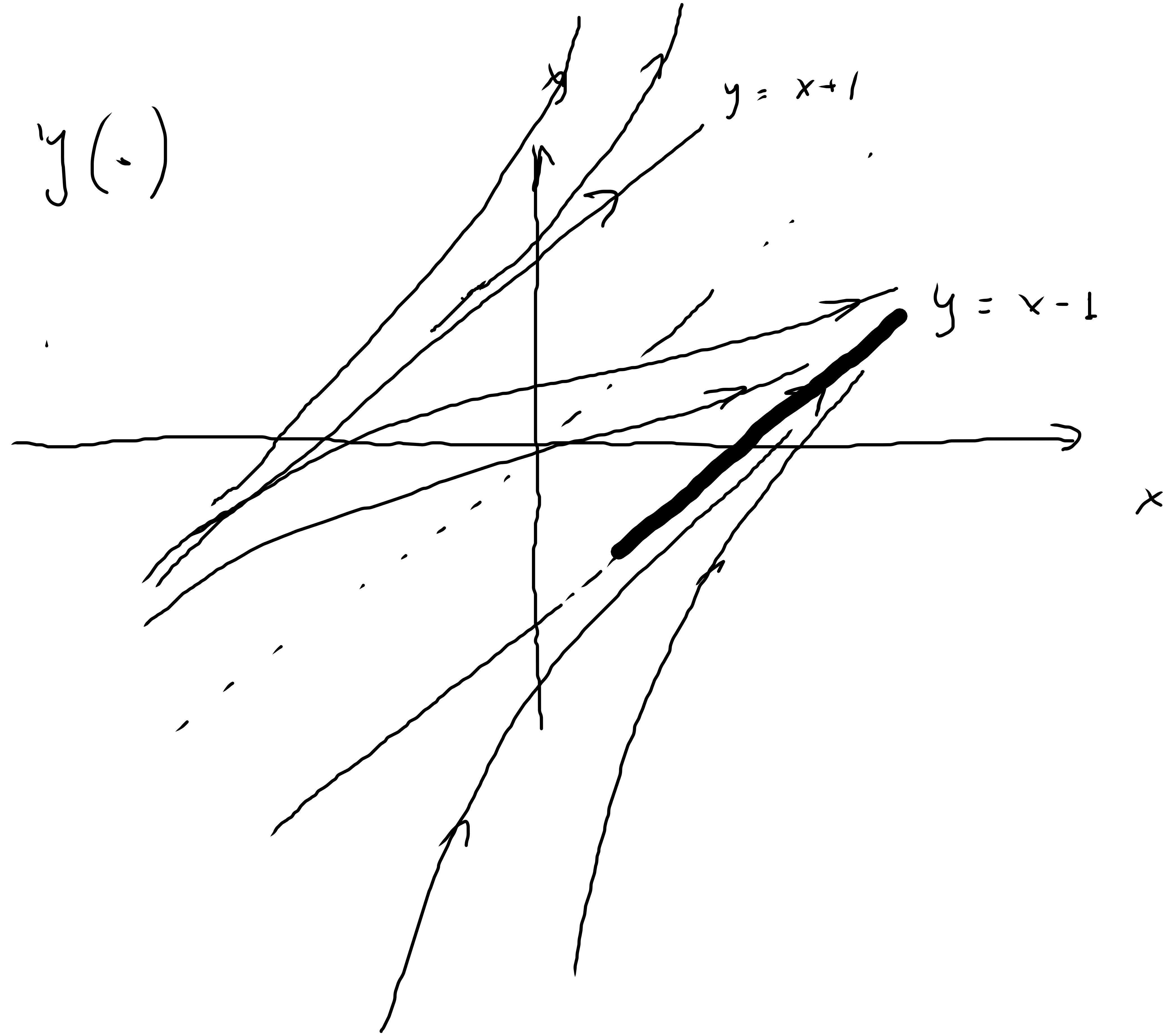
$$\hat{z}' = |\hat{z}| - 1. \Rightarrow \text{картина траекторий симм. отн. } 0,$$

2) Для случая $-1 < z_0 < 1$ выписать решения явно.

$$z' = |z| - 1 \Rightarrow \begin{cases} z' = z - 1, & z > 0 \\ z' = -z - 1, & z \le 0. \end{cases}$$

Отображение $z(\cdot) \rightsquigarrow y(\cdot)$

$y(x) = z(x) + x$.



Линейные ОДУ и системы.

$$f(x,y) = P(x)\,y + q(x)$$

$\underbrace{P(\cdot) - \text{матрица } n\times n}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}}$

$q(\cdot) \in \mathbb{R}^n$

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(x)y(x) + q(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

← задача Коши для системы лин. ОДУ

Замечание: часто $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{C}^n$ $\quad (\mathbb{R}^{n\times n} \rightsquigarrow \mathbb{C}^{n\times n})$.

Теор. $P \in C((a,b);\mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in C((a,b);\mathbb{R}^n)$

$x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$

Тогда $\exists!$ реш. $y(\cdot)$ задачи $(*)$ $\quad y \in C^1((a,b);\mathbb{R}^n)$

Д-во:

1). loc. $\exists \Leftarrow$ теор. Пеано.

2) $[a', b'] \subset (a, b)$

огр., замкн.,

$|P_{ij}(x)| \le A \quad \forall x \in [a', b']$

$\forall i = 1, \dots, n$

$j = 1, \dots, n$

$|q(x)| \le B$

— // —

$[a', b']$ произв.

$f(x, y) = P(x) y + q(x)$

$|f(x, y)| \le A|y| + B \quad \forall x \in [a', b'] \Rightarrow$ реш. опред. на $[a', b'] \Rightarrow$ опред. на (a, b)

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |P(x) y_1 - P(x) y_2| = |P(x)(y_1 - y_2)| \le A|y_1 - y_2| \Rightarrow$ единств.

Однородные системы.

$q \equiv 0$.

$$P \in C\big((a,b); \mathbb{R}^{n\times n}\big)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(x)\, y(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

$$y_0 = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

$y_1, y_2, \ldots, y_k \in C\big((a,b); \mathbb{R}^n\big)$ линейно независимы, если

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_k y_k(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

$$(\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

Замечание: если $y_1, \ldots, y_k$ – лин. зависимы $\Rightarrow$ $y_1(x), \ldots, y_k(x) \in \mathbb{R}^n$ лин. зависимые $\forall x$.

$\Leftarrow$ неверно.

Например $y_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_2(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\forall_{x \in \mathbb{R}}$ $y_1(x) \in \mathbb{R}^2$, $y_2(x) \in \mathbb{R}^2$ линейно зависимы.

$$\lambda_1(x) = -x, \quad \lambda_2(x) = 1.$$

$$\lambda_1(x)\, y_1(x) + \lambda_2(x)\, y_2(x) = 0.$$

Но при этом $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ л.нез независимы.