

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = P(x)y(x) + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in (a, b)$$

теор. { в этих условиях задача 1
имеет единств. решение.
 $y \in C^1((a, b); \mathbb{R}^n)$

Однородное ур.:

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = P(x)y(x)$$

$$(т.е. \quad q(x) \equiv 0)$$

$$y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$P \in C((a, b); \mathbb{R}^{n \times n})$$

$$q \in C((a, b); \mathbb{R}^n)$$

Замечание:

$$\text{vector } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$$

Об. бс (2):

1°) $y \equiv 0$ - решение

2°) y_1, y_2 - решения $\Rightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ - тоже решение
 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Умеем показать, что - бс решений имеет структуру беск. пр. бс.

Def. $\left\{ \begin{array}{l} y_1, y_2, \dots, y_n \in C((a, b); \mathbb{R}^n) \quad \text{линейно независимы,} \\ \text{если} \quad \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b) \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0. \end{array} \right.$

(умеем - линейно независимы).

т.е. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$
 $\lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) \neq 0$

Замечание. Если $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$ мон. заданы, то
вектора $y_1(\bar{x}), y_2(\bar{x}), \dots, y_k(\bar{x})$ мон. заданы
 $\forall \bar{x} \in (a, b)$

Наблюдая - проверю:

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall x$ векторы $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - мон. заданы.

$$y_2(x) = x^2 y_1(x)$$

\forall функции $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$ мон. заданы безобидно (!)

$\text{Lm} \{ \text{Lem } y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot) \}$ — решение $y_{p. 1} (2)$, ru

$$\lambda_1 y_1(\cdot) + \dots + \lambda_k y_k(\cdot) = 0 \iff \lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_k y_k(x) = 0$$

D. bo: " \Rightarrow " : абстрактно. $\text{Lem} \iff \lambda_1 y_1(x_0) + \dots + \lambda_k y_k(x_0) = 0 \rightarrow \text{гал. канонич. } \text{rot}(a, b)$

" \Leftarrow " : $y(x) := \lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_k y_k(x)$

$$\begin{cases} y' = P(x)y, & \text{т.е. } y(\cdot) - \text{решение (2)} \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \quad x_0 \in (a, b)$$

\Downarrow

$y \equiv 0$ — единственное решение лем. (1)

т.т.г.

Th. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Мн.-во решений } \forall x \in C^1(a, b); \mathbb{R}^n : y' = P(x)y, \\ \text{расширяемость на любое } \text{up-to}, \\ \text{и все непрерывно } \underline{n}. \\ (\dim V = n) \end{array} \right\}$,

Д-во:

1). (3) $\begin{cases} y' = P(x)y \\ y(x_0) = e_k \end{cases} \quad x_0 \in (a, b)$

\uparrow k -й единичный вектор в \mathbb{R}^n .

$\exists y_k$ - (единич.) решение (3).
 $y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$

- лин. независимы $\Rightarrow y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$
 лин. нез.

T.e. $\mathcal{L} \in V$ n independent n num. independent elements.
 \Rightarrow then $V \geq n$

2) because $g \in \Omega$, so $\dim V \leq n$.

$\tilde{y}(\cdot)$ - more precise (2). $\lambda_1 y_1(x_0) + \dots + \lambda_n y_n(x_0)$

$\tilde{y}(x_0) = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n}_{n+1 \text{ terms } \in \mathbb{R}^n} \Rightarrow \tilde{y}(x_0) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$
 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

(unique solution,
 $\tilde{y}(x_0), y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$ -
 - num. solutions)

Thus $\tilde{y}(\cdot), y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$ - num. solutions

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) \quad \forall x \in (a, b)$$



$$\dim V \leq n \quad \Rightarrow \quad \dim V = n, \quad \text{т.е. } y.$$

↑
т.к. все функции, что $\dim V \geq n$

Уточ.

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \quad y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$$

имеет ровно n лин. независимых решений $\{y^{(1)}, \dots, y^{(n)}\}$
можно на промежутке, например, так δ y -ке подобрать, т.е.
 $y_k' = P(x)y_k, \quad y_k(x_0) = e_k$

$\{y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$ - набор независимых решений

система (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{решения} \\ \text{система} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{решения} \\ \text{система} \end{array} \right\}$ (2)

$$Y(x) := \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \end{bmatrix} \quad \text{матрица } n \times n$$

фундаментальная матрица ОДУ (2)

$$\frac{dY}{dx}(x) = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix} \quad Y(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$= \begin{bmatrix} P(x)y_1(x) & \dots & P(x)y_n(x) \end{bmatrix} = P(x)Y(x)$$

More robust

$$\frac{dY}{dx} = P(x) Y(x)$$

$$Y(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

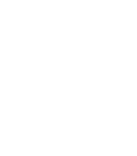
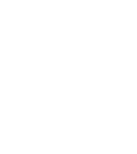
Exam, например, $y_k(\cdot)$ corresponds to k -th column,
t.e. $y_k(x_0) = e_k$, so

$$Y(x_0) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] = Id$$

More robust, to every column
 $\frac{dY(x)}{dx} = P(x) Y(x)$, $Y(x) = Id$.

$W(x) := \det Y(x)$ — определитель (определитель Вронского)

Гиб. { (1) $\{y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$ — фун. мес. решений (2)



(2°) $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

(3°) $W(x_0) \neq 0$ для какои-то $x_0 \in (a, b)$.

Лемма: (1°) \Leftrightarrow (2°) — эк-во определителя

(2°) \Rightarrow (3°) — верно.

(3°) \Rightarrow (1°). $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$ лнн. незал $\mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \{y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$ — лев. базис p -уравн.

т.е. \Leftrightarrow матрица $P(x)$ обратима

$$\frac{d}{dx} Y(x) = P(x) Y(x)$$

← матрица $P(x)$.

Вопрос:

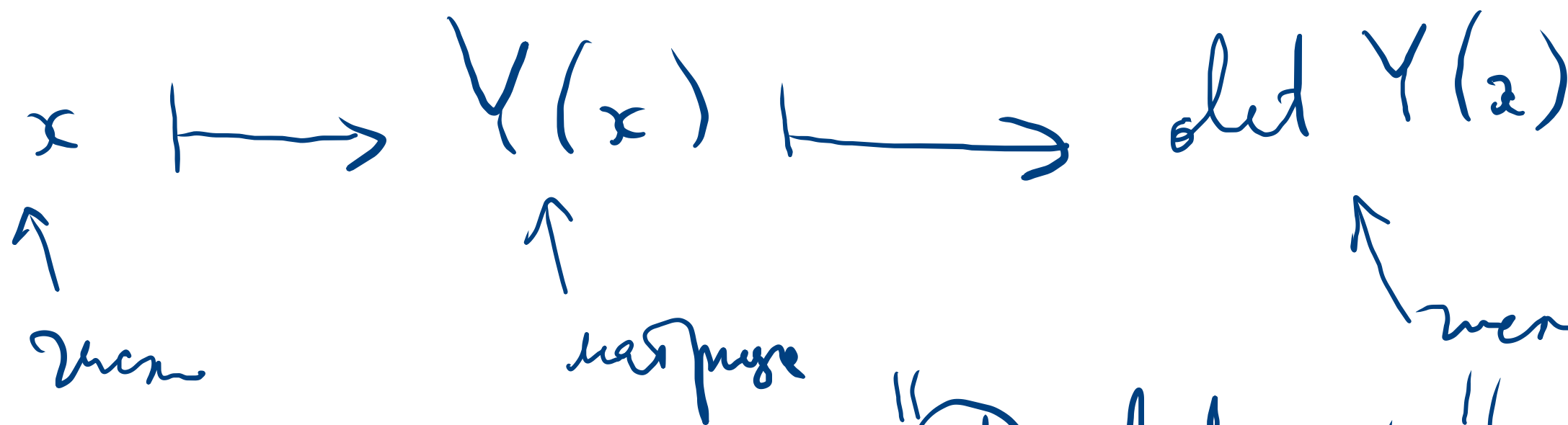
а матрица $Y(x)$ обратима?

$$W(x) := \det Y(x) \quad ?$$

Вопрос
/ $W(\cdot) \in \mathbb{R}$ /

Далее надо найти частную производную $W'(x) =$
 $= \frac{d}{dx} (\det Y(x))$

чем ~~реже~~ ~~уменьшение~~ ~~на~~ ~~было~~
 уменьшение.



$\frac{d}{dx} (\det Y(x)) = \text{D} \det \cdot Y'(x)$
но частные? ?

Как вычислить "Дет"

$$f(A) := \det A$$

↑
матрица $n \times n$

$$f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(*) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (f(A + \varepsilon T) - f(A)) =: f'(A) T$$

↑
матрица $n \times n$

Значит вычислить (*), используя определение

$$f'(Id) T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(Id + \varepsilon T) - f(Id)}{\varepsilon} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (f(Id + \varepsilon T)) \right|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left(\det (\text{Id} + \varepsilon T) \right) \right|_{\varepsilon=0} = \text{Tr } T.$$

$$\begin{aligned} \det (\text{Id} + \varepsilon T) &= \det \left(\varepsilon \left(T + \frac{1}{\varepsilon} \text{Id} \right) \right) = \\ &= \varepsilon^n \det \left(T + \frac{1}{\varepsilon} \text{Id} \right) \end{aligned}$$

\nearrow char. polynomial T at $(-\frac{1}{\varepsilon})$

$$P_n(T)(\lambda) = \det(T - \lambda \text{Id}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

$$\begin{aligned} \det(\text{Id} + \varepsilon T) &= \varepsilon^n P_n(T)\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ &= \varepsilon^n \left(\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^n + a_{n-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} + \dots + a_0 \right) \\ &= (-1)^n + (-1)^{n+1} \varepsilon a_{n-1} + b_{n-1} \varepsilon^2 + \dots + a_0 \varepsilon^n \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} (\dots) \Big|_{\varepsilon=0} = (-1)^{n+1} a_{n-1} = \text{Tr } T$$

↑
neg T.

До нульовану необовинно.

$$A'(Id)T = \text{Tr } T.$$

Через нульовану

$$f'(A)T = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\det(A + \varepsilon T)) \right|_{\varepsilon=0} =$$

↑
диференціаль
насп.

$$= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \det(A (Id + \varepsilon A^{-1} T)) \right|_{\varepsilon=0} =$$
$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \det A \det (Id + \varepsilon A^{-1} T) \right|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \det A \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det(I + \varepsilon A^{-1}T) =$$

$$= \det A \operatorname{Tr}(A^{-1}T)$$

$$f'(A)T = \det A \operatorname{Tr}(A^{-1}T)$$