$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(x)\,y(x) + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}$

$P \in C\big((a,b);\mathbb{R}^{n\times n}\big)$

$q \in C\big((a,b);\mathbb{R}^n\big)$

$$y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in (a,b)$$

Теор. В этих условиях задача 1 имеет единств. решение $y \in C^1\big((a,b);\mathbb{R}^n\big)$.

Замечание: Вместо $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$

$\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$

Однородное ур-е

$$(2)\quad \frac{dy}{dx} = P(x)\,y(x) \qquad (\text{т.е. } q(x) \equiv 0)$$

Св-ва (2):

1° $y \equiv 0$ – решение

2° $y_1, y_2$ – решения $\Rightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ – также решение $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Иначе говоря, мн-во решений имеет структуру вект. пр-ва.

Def. $y_1, y_2, \ldots, y_k \in C((a,b); \mathbb{R}^n)$ лин. независим., если $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) \equiv 0 \ \forall x \in (a,b)$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

(иначе – лин. зависимы).

т.е. $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, $\lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_n y_k(x) \not\equiv 0$

Замечание. Если $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$ лин. зависимы, то вектора $y_1(\bar{x}), y_2(\bar{x}), \dots, y_k(\bar{x})$ лин. зависимы $\forall \bar{x} \in (a, b)$

Наоборот — неверно:

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_2(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall x$ вектора $y_1(x)$ и $y_1(x)$ — лин. зависимы.

$$y_2(x) = x^2 y_1(x)$$

А функции $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$ линейно независимы (!!)

Lm $\Big\{$ Если $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$ – решения ур-я (2), то

$\lambda_1 y_1(\cdot) + \dots + \lambda_k y_k(\cdot) = 0 \iff \lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_k y_k(x) = 0$

$\forall x \in (a, b)$.

$\iff \lambda_1 y_1(x_0) + \dots + \lambda_k y_k(x_0) = 0$ для какого-то $x_0 \in (a, b)$

Д-во: " $\Rightarrow$ ": очевидно верно

" $\Leftarrow$ ": $y(x) := \lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_k y_k(x)$

$$\begin{cases} y' = P(x) y, & \text{т.е. } y(\cdot) - \text{решение } (2). \\ y(x_0) = 0 & x_0 \in (a, b) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$y \equiv 0$ в силу единственности реш. (1)

ч.т.д.

Th. Мн-во решений $V := \{ y \in C^1((a,b); \mathbb{R}^n) : y' = P(x)y \}$, рассматриваемое как векторное пр-во, имеет размерность $\underline{n}$. $(\dim V = n)$

Д-во:

1). $(3) \begin{cases} y' = P(x)y \\ y(x_0) = e_k \end{cases}$ $\qquad x_0 \in (a,b)$

$e_k$ — $k$-й единичный коорд. вектор в $\mathbb{R}^n$.

$\exists\, y_k$ — (единств.) решение (3).

$\underset{e_1}{\underbrace{y_1(x_0)}}, \dots, \underset{e_n}{\underbrace{y_n(x_0)}}$ — лин. независимы $\Rightarrow y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$ лин. нез.

Т.е. в $V$ найдены $n$ лин. независимых элементов.

$\Rightarrow \dim V \geqslant n$

2) Осталось д-ть, что $\dim V \leq n$.

$\tilde{y}(\cdot)$ – любое решение (2).

$$\underbrace{\tilde{y}(x_0),\ e_1, \ldots, e_n}_{n+1 \text{ вектор в } \mathbb{R}^n} \Rightarrow \tilde{y}(x_0) = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n}_{\lambda_1 y_1(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n(x_0)}$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

(иначе говоря, $\tilde{y}(x_0), y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)$ – лин. зависимы)

Тогда $\tilde{y}(\cdot), y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$ – лин. зависимы

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\Downarrow$$

$$\dim V \le n \Rightarrow \dim V = n, \text{ ч.т.д.}$$

т.к. уже доказано, что $\dim V \geq n$

**Итог.** $\frac{dy}{dx} = P(x)y \qquad y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$

имеет ровно $\underline{n}$ лин. независимых решений $\{y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)\}$

Можно их получить, например, так в д-ве теоремы, т.е.

$y_k' = P(x) y_k, \quad y_k(x_0) = e_k$

$\{y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$ — лин. независим. решения (2)

фундаментальная система решений (2)

$$Y(x) := \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \end{bmatrix}$$ матрица $n \times n$.

фундаментальная матрица ОДУ (2)

$$\frac{dY}{dx}(x) = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix} =$$

$$Y(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$= \begin{bmatrix} P(x) y_1(x) & \dots & P(x) y_n(x) \end{bmatrix} = P(x) Y(x)$$

Иначе говоря

$$\frac{dY}{dx} = P(x)\,Y(x) \qquad Y(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Если, например, $y_k(\cdot)$ получены так, как в д-ве теоремы, т.е. $\underline{y_k(x_0) = e_k}$, то

$$Y(x_0) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 \end{bmatrix} = Id$$

Иначе говоря, в этом случае

$$\frac{dY(x)}{dx} = P(x)\,Y(x), \quad Y(x_0) = \underline{Id}.$$

$W(x) := \det Y(x)$ — вронскиан (определитель Вронского)

Утв. $(1^\circ)$ $\{y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)\}$ — фунд. мн. решений $(2)$

$\Updownarrow$

$(2^\circ)$ $W(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$

$\Updownarrow$

$(3^\circ)$ $W(x_0) \neq 0$ для какой-то $x_0 \in (a, b)$.

Д-во: $(1^\circ) \Leftrightarrow (2^\circ)$ — св-во определителя

$(2^\circ) \Rightarrow (3^\circ)$ очевидно.

$(3^\circ) \Rightarrow (1^\circ)$. $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)$ лин. незав. $\mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \{y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$ — лин. незав. ф-ции,

т.е. это фунд. система решений $(1^\circ)$, ч.т.д.

$$\frac{d}{dx} Y(x) = P(x) Y(x)$$

фундамент. матрица (2).

**Вопрос**: а какому ОДУ удовлетворяет вронскиан $W(x) := \det Y(x)$ ? $/W(\cdot) \in \mathbb{R}/$

Для этого надо сумел посчитать $W'(x) =$

$$= \frac{d}{dx}\left(\det Y(x)\right)$$

очень хорошее упражнение на взятие производных.

$$x \longmapsto Y(x) \longmapsto \det Y(x)$$

число матрица число.

$$\frac{d}{dx}\left(\det Y(x)\right) = \text{"}D\det \cdot Y'(x)\text{"}$$

по матрице?

Как посчитать "D det"

$$f(A) := \det A \qquad f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

матрица $n\times n$

$$(*) \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big(f(A+\varepsilon T) - f(A)\Big) =: f'(A)T$$

матрица $n\times n$

Чтобы посчитать $(*)$, сначала посчитаем

$$f'(Id)T = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(Id+\varepsilon T) - f(Id)}{\,} =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big(f(Id+\varepsilon T)\Big)^{\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\det\left(Id + \varepsilon T\right)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \operatorname{Tr} T.$$

$$\det\left(Id + \varepsilon T\right) = \det\left(\varepsilon\left(T + \frac{1}{\varepsilon} Id\right)\right) =$$

$$= \varepsilon^n \underbrace{\det\left(T + \frac{1}{\varepsilon} Id\right)}_{\text{хар. полином } T \text{ от } \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

$$P_n(T)(\lambda) := \det(T - \lambda\,\mathrm{Id}) =$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

$$\det(\mathrm{Id} + \varepsilon T) = \varepsilon^n P_n(T)\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \varepsilon^n\left(\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^n + a_{n-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} + \dots + a_0\right) =$$

$$= (-1)^n + (-1)^{n+1}\varepsilon\, a_{n-1} + b_{n-1}\varepsilon^2 + \dots + a_0\varepsilon^n$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\dots)\Big|_{\varepsilon=0} = (-1)^{n+1} a_{n-1} = \mathrm{Tr}\, T$$

$\uparrow$ trace $T$.

Это посчитали

$$f'(\mathrm{Id})T \overset{\text{любопытно.}}{=} \operatorname{Tr} T.$$

Теперь посчитаем

$$f'(A)T = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\det(A+\varepsilon T)\right)\Big|_{\varepsilon=0} =$$

обратимая матр.

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \det\left(A\left(\mathrm{Id}+\varepsilon A^{-1}T\right)\right) =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \det A \det\left(\mathrm{Id}+\varepsilon A^{-1}T\right) =$$

$$= \det A \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \det(\mathrm{Id} + \varepsilon A^{-1} T) =$$

$$= \det A \ \mathrm{Tr}(A^{-1} T)$$

$$f'(A)T = \det A \ \mathrm{Tr}(A^{-1} T)$$