$$\begin{cases} y'(x) = |y| - x^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1) \qquad x_0 \in \mathbb{R}, \; y_0 \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим обязательно случай $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, т.е. $y(0) = 0$.

Решение.

$f(x,y) := |y| - x^2$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, f - непр

1). $\exists$ решения.

лок. $\exists$ гарантируется теор. Пеано.

2). Единств. решения.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K\,|y_1 - y_2| \quad ?$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \big||y_1| - |y_2|\big| \leq |y_1 - y_2|$$

$\Rightarrow$ решения задачи (1) единств. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ траектории не пересекаются.

3). Макс. интервал существ. решений.

$$y' = |y| - x^2 \qquad f(x,y) = |y| - x^2$$

$$|f(x,y)| \leq |y| + x^2$$

$$x \in [a,b] \Rightarrow x^2 \leq C$$

от интерв. завис

$$|f(x,y)| \leq |y| + C$$

$\Rightarrow$ реш. (1) $\exists$ на любом $[a, b]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ на всём $\mathbb{R}$

4). а) $y' > 0 \iff |y| > x^2 \iff \left[\begin{array}{l} y > x^2 \\ \\ y < -x^2 \end{array}\right.$

$$y' = |y| - x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$y \uparrow$$

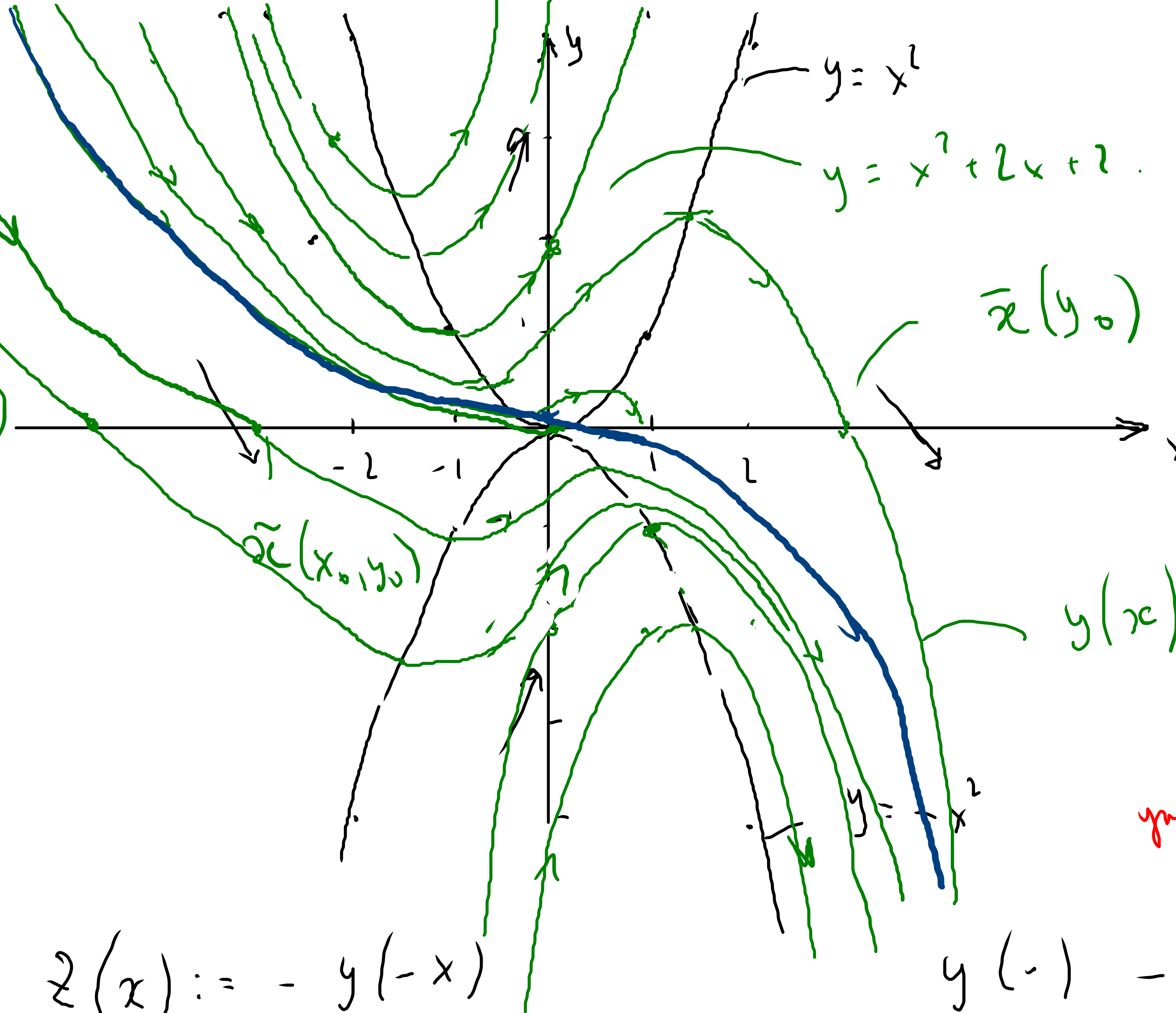
б) $y' < 0 \iff |y| < x^2 \iff -x^2 < y < x^2$

$$\Updownarrow$$

$$y \downarrow$$

3). $y' = 0 \iff y = \pm x^2$.

$y(x) =$
$= x^2 + 2x + 2 + Ce^x$
$C = C(x_0, y_0)$



$y = 0 \Rightarrow$
$y' = -x^2$

$\bar{x}(y_0) \to 0$, если $y_0 \to 0$

$y(x) =$ упр. Выписать формулу
(указание: либо исп. $y' = -y - x^2$,
либо исп. симметрию).

упр: для ВСЕХ сразу выписать асимптотики решен. при $x \to \pm\infty$

5). $z(x) := -y(-x)$ $\qquad y(\cdot)$ – решение ур-я $y' = |y| - x^2$

$$z'(x) = y'(-x) = |y(-x)| - (-x)^2 = |-y(-x)| - (-x)^2 = |z| - x^2$$

$z'(x) = |z| - x^2$, т.е. $z(\cdot)$ — решение того же самого ур-я.

Иначе говоря, картинка траекторий симм. отн. $(0,0)$

Следствие: в принципе можно, например, траект. исследовать для $y_0 \geq 0$, а для $y_0 < 0$ воспользоваться симметрией.

б) Исследуем случай $y > 0$ (т.е. как себя ведут решения в верхней полупл-сти).

$$y' = y - x^2$$

$$y(x) = u(x)\,v(x)$$

$$y' = u'v + v'u$$

$$u'v + v'u = uv - x^2$$

$$v(\underbrace{u'-u}_{=0}) + v'u + x^2 = 0$$

$u' - u = 0$ ← такое выберем.

$$u' = u$$

$$\frac{du}{u} = dx \quad \Rightarrow \quad u = e^x$$ ← одно из решений.

$$v'e^x = -x^2 \Rightarrow v' = -x^2 e^{-x}$$

$$v(x) = e^{-x}(x^2+2x+2) + C \Rightarrow y(x) = \underbrace{u(x)}_{=e^x} v(x) = x^2 + 2x + 2 + Ce^x$$

$y(x) = x^2+2x+2 + Ce^x$

Частн. случаи.

A). $x_0 = 0.$ $\quad y_0 = y(0) = C+2 \Rightarrow C = y_0 - 2.$

$$y(x) = x^2+2x+2+(y_0-2)e^x$$

A.1). $y_0 > 2 \Rightarrow y(x) > 0 \quad \forall x$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty \qquad y(x) = (y_0-2)e^x + O(x^2) \quad x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty \qquad y(x) = x^2 + o(x^2) \quad x\to-\infty.$$

A.2) $y_0 = 2$.

$$y(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

A.3) $0 < y_0 < 2$.

$$y(x) = \underbrace{x^2 + 2x + 2 + (y_0 - 2)e^x}_{\varphi(x)}$$

← решение только в верхней полуплоск-ти.

(а в нижней полупл-ти $y' = -y - x^2$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$,

$\varphi(0) = y_0 > 0$

⇒ график φ пересекает ось Ox где-то правее 0. (в т. $\bar{x} = \bar{x}(y_0) > 0$)

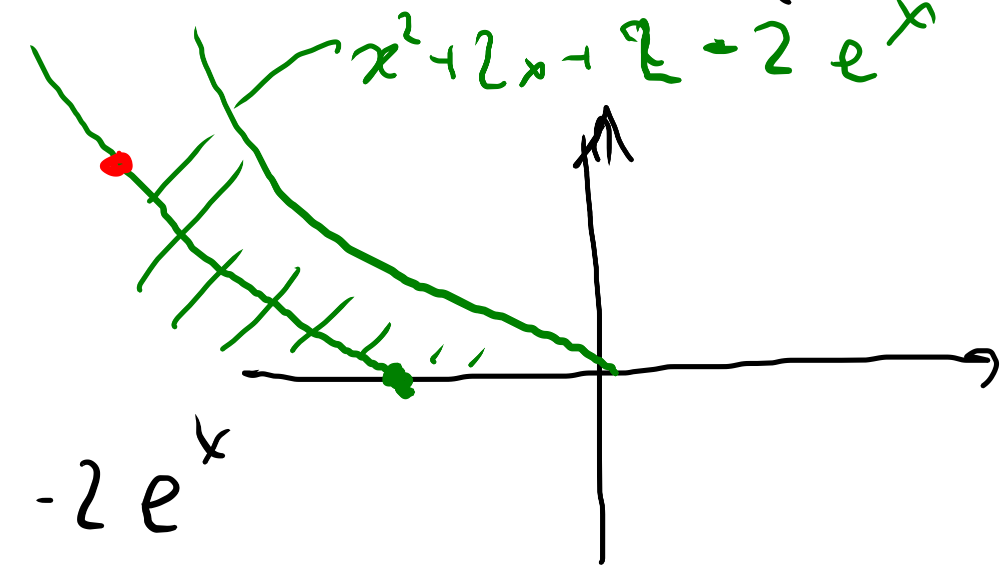
$y(x) = \varphi(x)$ $\forall x \in (-\infty, \bar{x}(x_0))$, т.е. $y(x) \geq 0$ $\forall x < \bar{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$, $\quad y(x) = x^2 + o(x^2)$ при $x \to -\infty$

A.4) $y_0 = 0$ $\quad \left(\bar{x}(y_0) = \bar{x}(0) = 0\right)$.

т.е. решение $y(x)$ опред. ф-лой

$$y(x) = x^2 + 2x + 2 - 2e^x \quad \text{на } (-\infty, 0)$$



B). $y_0 > 0$, $\quad x_0$: (x_0, y_0)

$x_0 < 0$, $\quad 0 < y_0 < x^2 + 2x + 2 - 2e^x$

$$y(x) = x^2 + 2x + 2 - Ce^x \qquad C = C(x_0, y_0)$$

реш. опред. этой ф-лой на $\left(-\infty, \tilde{x}(x_0, y_0)\right)$

$$\tilde{x}(x_0, y_0) < 0.$$