$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$)

(1) $$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks}\, ds \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Фурье-образ (Фурье-спектр) f

$$f \longmapsto \{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

Ожидание: $$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} \qquad (2)$$

в каком-то смысле.

Знаем: (1°) $f \in L^2(-\pi,\pi) \iff \{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$

(2°) Тогда (2) сход. в L^2.

Но ведь (1) был $\forall f \in L^1(-\pi,\pi)$.

Вопр. 1) Если $f \in L^1(-\pi,\pi) \Rightarrow$ как ведут себя $\hat{f}(k)$?

2) Можно ли написать (2), и в каком смысле.

Частичн. ответ на 1):

Лм Римана: $f \in L^1(-\pi,\pi) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}\,ds \to 0$, $k \to \pm\infty$.

(т.е., иными словами, $\hat{f}(k) \to 0$ при $k \to \pm\infty$).

Идея: Когда можно гарантировать (2) $\forall x \in (-\pi,\pi)$?

Для этого надо оценить $|f(x) - S_n(x)|$

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikx} = (f * D_n)(x) =$$

ядро Дирихле

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \frac{\sin \frac{(2n+1)}{2} (\overbrace{s-x}^{t})}{\sin \frac{s-x}{2}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\, \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin t/2}\, dt.$$

$$f(x) - S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - f(t+x)\big) \cdot \frac{\sin (2n+1)\, t/2}{\sin t/2}\, dt$$

знакоперем., сильно осцилл. при $n \gg 1$.

Наблюдение 1. $\exists\ \delta \in (0, \pi)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} \underbrace{f(t+x)\,\frac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{\sin t/2}}_{\in L^1}\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{по Л. Римана}$$

И аналогично

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} f(t+x)\,\frac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{\sin t/2}\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{—//—}$$

$$f(x) - S_n(x) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\left(f(x) - f(t+x)\right)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin t/2}\,dt}_{\to 0} +$$

$$+\ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \text{— " —}}$$

Принцип локализации: Т.о., сходимость (2) в точке x зависит ТОЛЬКО от поведения f в $(x-\delta,\ x+\delta)$

$\delta > 0$ любое

Th. (U. Dini). Пусть $\exists \delta > 0$ $\exists \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt$.

Тогда (2) сходится в точке x

условие Дини.

Когда это выполнено?

Например: 1) $f \in \mathrm{Lip}$ (тогда $|f(x+t) - f(x)| \le C|t|$

2) f гельдерова. $|f(x+t) - f(x)| \le C|t|^{\alpha}$

$0 < \alpha \le 1$

$\circ)$. $\quad |f(x+t)-f(x)| \leq \omega(|t|) \longrightarrow$ ф-ции класса Дини.

$\omega(|t|)$ — модуль непрерывности.

$$\int_0^\delta \frac{\omega(s)}{s}\,ds < +\infty.$$

условие Дини.

__Д-во Th Дини:__

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{\overbrace{\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right)\cdot\underbrace{\frac{t}{\sin t/2}}_{\text{огр.}}}^{\in L^1(-\delta,\delta)}}_{} \sin(2n+1)\frac{t}{2} \longrightarrow 0$$

$\frac{f(x+t)-f(x)}{t} \in L^1(-\delta,\delta)$

при $n\to\infty$ по Лем. Римана.

ч.т.д.

Замечание 1) Если $f(x\pm 0) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0^\pm} f(x+\varepsilon)$

$f(x) - S_n(x) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} - S_n(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x-0) - f(\cancel{x+}t)\right)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin t/2}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+0) - f(x+t)\right) \text{———} \text{"} \text{———}$$

Дост. тогда требовать, чтобы

$$\int_{-\delta}^{0} \left| \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \right| dt < +\infty \qquad \delta > 0$$

$$\int_{0}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt < +\infty$$

При этом $S_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

(а не к $f(x)$)

Популярное ("в народе") следствие:

Если f кусочно непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и в каждой точке имеет левую и правую произв. — Loc. Lip или Loc Гёльдер

Тогда (2) сх. к $\begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ — точка непр.} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{если } x \text{ — точка разрыва} \end{cases}$

Вопрос: → а что, если $f \in C([-\pi, \pi])$?

Ответ: Сходимости (2) может не быть в некоторых точках (P. Du Bois-Reimond).

$\to$ а что, если $f \in L^2(-\pi,\pi)$?

(или $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $p>1$)

$(p \geq 2) \Rightarrow (2)$ сх. хотя бы в смысле $L^2(-\pi,\pi)$.

(само по себе это НЕ ЗНАЧИТ поточечно п.в.)

Carleson: кроме того (2) сх.
$(p>1)$ для п.в. $x \in (-\pi,\pi)$ $\Big\}$ задача Лузина

В частности, если $f \in C([-\pi,\pi])$, то также
(2) сх. для <u>п.в.</u> $x \in (-\pi,\pi)$

А.Н. Колмогоров $\to$ а если $f \in L^1(-\pi,\pi)$ (только L^1), тогда, вообще говоря (2) может не сходиться НИГДЕ (поточечно)

Как (2) сходится в смысле Чезаро?

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n}\left(S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)\right)$$

$$? \quad \sigma_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int^{\pi} f(x+t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{\sin t/2}\,dt = \left\{ S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin t/2}\,dt \right.$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2 dt = (f * F_n)(x)$$

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2.$$

Ct - ba: 1°) $F_n \geq 0$.

2°) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1$.

/ D - bo: $\displaystyle\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,F_n(t)\,dt$

$f \equiv 1 \Rightarrow \sigma_n = 1$.

$\displaystyle 1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt$, c.v.g. /.

3°). $t \in (\delta, \pi]$ $\quad \delta > 0$.

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2 \leq \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2.$$

$\sin t/2 > \delta/\pi$

$$\int_\delta^\pi F_n(t)\,dt = \frac{\pi^2}{2\pi n}\int_\delta^\pi \frac{1}{\delta^2}\,dt \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$

(для фикс. $\delta > 0$)

Аналогично, $\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t)\,dt \to 0$, $n \to \infty$

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - f(x+t)\big) F_n(t)\,dt$$

$\rceil$ $f \in C([-\pi, \pi])$ Тогда $|f(x)| \le M$.

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \le \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) \big|\overbrace{f(x) - f(x+t)}^{\le 2M}\big| F_n(t)\,dt +$$

$$+ \int_{-\delta}^{\delta} \text{---}\,''\,\text{---}\,''\,\text{---} \le$$

$$\le \underbrace{2M \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) F_n(t)\,dt}_{\to 0 \ (\le \frac{\varepsilon}{2})} + \frac{\varepsilon}{2} \overbrace{\int_{\cancel{-\delta}\ -\pi}^{\cancel{\delta}\ \pi} F_n(t)\,dt}^{1}$$

Выберем $\varepsilon > 0$, δ: $|f(x) - f(x+t)| < \varepsilon/2$ $\quad |t| < \delta$

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \forall n \geq \bar{n}(\varepsilon).$$

Иначе говоря, доказали

Th. (Fejer) $\left\{ \begin{array}{l} f \in C(\cancel{[-\pi, \pi]}\ S^1) \Rightarrow \\ (2) \text{ сходится в смысле Чезаро} \\ \forall x \in \cancel{[-\pi, \pi]}\ S^1 \end{array} \right.$

на самом деле сх. σ_n даже равномерн.

Следствие 1. $f \in C([-\pi,\pi]) \Rightarrow$ (2) в точке x либо сходится (и тогда обязат. к $f(x)$), либо вообще расходится.

Следствие 2. $f \in L^1(-\pi,\pi) \Rightarrow \sigma_n \to f$ в $L^1(-\pi,\pi)$.

Д/з доказать

(Указание: для $f \in C$ — доказана сх. в C, значит и в L^1. Воспользоваться плотностью C в L^1).

Напоминание: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится (но сх по Чезаро к $\frac{1}{2}$)

Наблюдение. (Th. Вейерштрасса: Триг. полиномы плотны в $C([-\pi, \pi])$).

Th. Фейера даёт конкр. способ приближ.