$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$) $f = f(x)$

её же можно видеть,

→ либо как $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$)
периодическую.

→ либо как $f : S^1 \to \mathbb{C}$ (— " —)

$f \longmapsto \{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in$ {последовательности чисел}. $= \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} \, ds$$

имеет смысл, например, если $f \in L^1(-\pi, \pi)$

(или $f \in L^1(S^1, d\varphi)$)

полярн. угол.

$$\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto f(\cdot)$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

А если $f = f(x_1, x_2)$

$f : [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$)

или (эквивалентно), $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ периодич.

$$f(x_1 + 2k\pi, x_2 + 2m\pi) = f(x_1, x_2) \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

или $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{C}$

$\underbrace{S^1 \times S^1}$ 2 мерный тор

Фурье - спектр ф-ции f.

Фурье - образ

$$f \longmapsto \{\hat{f}(k_1, k_2)\}_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \simeq \{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$$

частоты, переменная (вектор.)

$$\hat{f}(k) = \hat{f}(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_1 s_1} e^{-ik_2 s_2} f(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 =$$

скал. произв.

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{S^1 \times S^1} f(s)\, e^{-ik \cdot s}\, ds \qquad (k \in \mathbb{Z}^2$$

Что точно надо было

1°) $f'(s)$ опред. дост. п.в.

2°) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-iks} \underbrace{f'(s)}\, ds$

идея сперва: дост. $f \in L^1[-\pi,\pi]$

Задача 1. $\exists\, f \in \cancel{C^1}([-\pi,\pi]; \mathbb{C})$ абсолютно непр

важно ли это?

$f(-\pi) = f(\pi)$

$f' \in \cancel{C}([-\pi,\pi]; \mathbb{C})$ L^1

Как соотносятся $\hat{f}$ и $\hat{f'}$?

Решение: $\hat{f'}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-iks} f'(s)\, ds =$

$k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-iks}\, df(s) = \frac{1}{2\pi} e^{-iks} f(s) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{(-ik)}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks}\, ds =$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(e^{-ik\pi}f(\pi) - e^{ik\pi}\underbrace{f(-\pi)}_{=f(\pi)}\right) + \frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}f(\pi)\left(e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}\right) + ik\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}\,ds\right)}_{\hat{f}(k)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}f(\pi)\left(\cancel{2i\sin k\pi}\right)^{0} + ik\hat{f}(k) =$$

$$= ik\hat{f}(k).$$

Итого: $\boxed{\hat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)}$

„дифференц. в простр. области $\simeq$ умножение на (ik) в частотной области“.

$$\boxed{\hat f(k) = \frac{1}{ik}\widehat{f'}(k)}$$

Важно ли это?

C^{n-1} и $f^{(n-1)}$ – AC, $f^{(n)} \in L^1$

__Задача__ 2. А что, если $f \in \cancel{C^n}([-\pi, \pi])$?

$$f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi) \quad \forall m = 0, \dots, n-1$$

Ответ: $\widehat{f^{(j)}}(k) = (ik)^j \hat f(k)$ $\quad \forall j = 0, \dots, n$

Факты про $\hat f$

1°) $f \in L^2 \Rightarrow \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\hat f|^2(k) < +\infty$

$\{\hat f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$

В частности, $\hat f(k) \to 0$ при $k \to \pm\infty$.

??

2) $f \in L^1$

$\hat f(k) \to 0$ при $k \to \pm\infty$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f(k)\, e^{ikx}$$

Т.е. можно ряд Фурье почленно дифф-

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f'}(k)\, e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\,\hat f(k)\, e^{ikx}$$

Важно ли это?

Наблюдение:

$$f \in \cancel{C^1}\ AC([-\pi,\pi];\mathbb{C}),$$

$$|\hat f(k)| = \frac{|\hat{f'}(k)|}{|k|} = o\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad |k|\to\infty$$

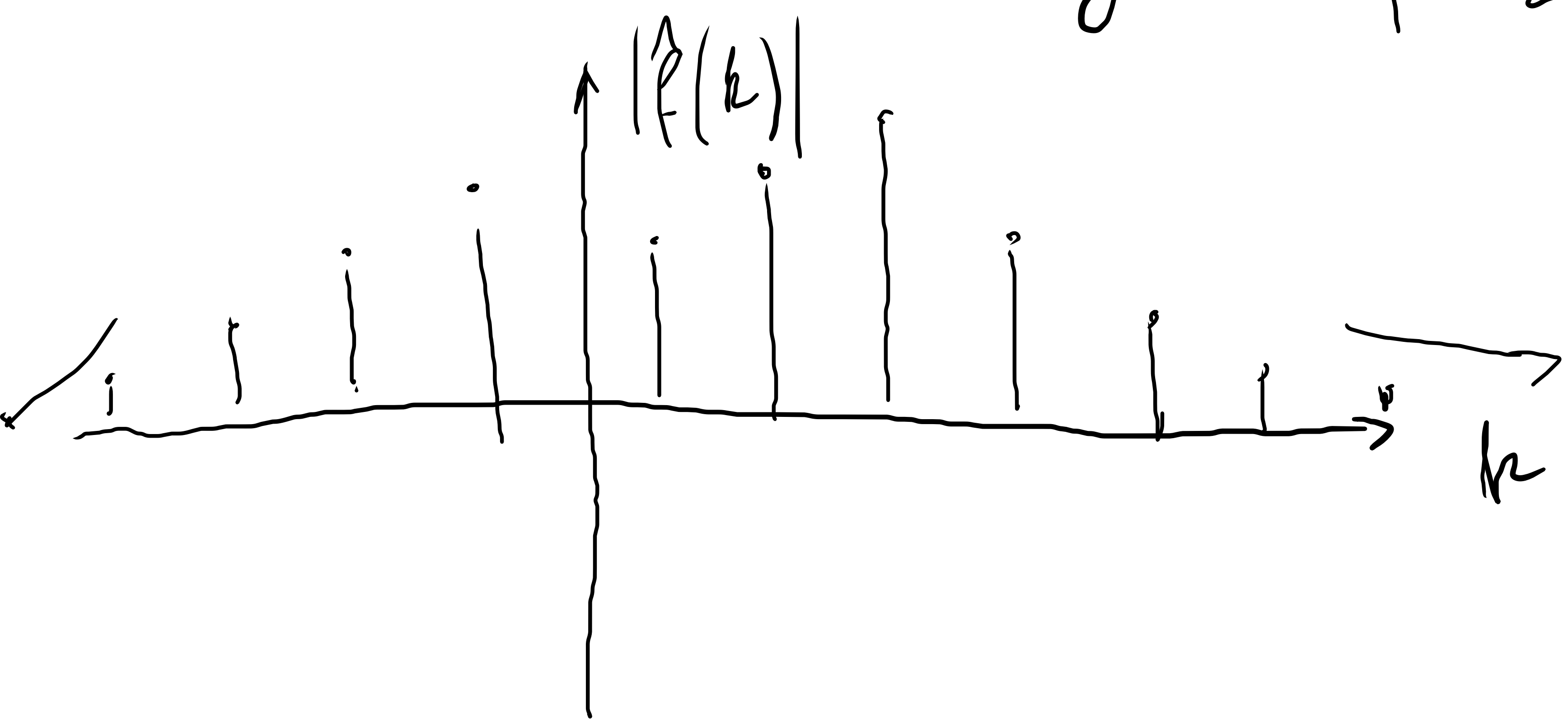
$$\hat{f'}(k) = o(1) \text{ при } |k| \to \infty.$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, e^{iks}\, ds$$

<u>Лм. Римана</u> $\left\{ f \in L^1 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, e^{iks}\, ds \to 0, \quad k \to \pm\infty \right.$

По-другому: $f \in L^1 \Rightarrow \{\hat{f}(k)\} \in c_0$

c_0 — пр-во послед. $\to 0$ при $k \to \pm\infty$.



$$\begin{cases} f \in C^n & \left(f^{(m)}(\pi) = f^{(m)}(-\pi) \quad \forall m = 0, \dots, n-1\right) \\ \hat{f}(k) = o\left(\dfrac{1}{|k|^n}\right) & k \to \pm\infty \end{cases}$$

! Упражнение (Д/з): В этих условиях оценить скорость сходимости ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

$$\left| f(x) - \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \to 0 \quad \text{при } m \to \pm\infty.$$

насколько быстро? (как $o\left(\frac{1}{m}\right)$?) найти

Задача 3.

$f \in C^1([0,\pi]) \Rightarrow \int_0^{\pi} |f|^2(x)\,dx \leq C \int_0^{\pi} |f'|^2(x)\,dx$

$f(0) = f(\pi) = 0$

Д-ть, и сказать, для каких $C > 0$ это верно

не зав. от f.

Нер-во Стеклова

(частн. случай нер-ва Фридрихса)

$f \in C^1(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ огр. откр. мн-во, $f(x) = 0$ $\forall x \in \partial\Omega$

$\exists\, C > 0$ (не зав. от f) :

$$\int_\Omega |f|^2(x)\,dx \le C \int_\Omega |f'|^2(x)\,dx$$

— нер-во Фридрихса.

(нам нужен д. сл. $n = 1$, $\Omega = (0, \pi)$).

Д-во нер-ва (с наим-ей C):

$$f(x) = \int_0^x f'(s)\,ds \qquad f(0)=0$$

$$|f(x)| \le \int_0^x |f'(s)|\,dx \le \int_0^\pi 1\cdot|f'(s)|\,ds \le \sqrt{\int_0^\pi 1\,ds \int_0^\pi |f'(s)|^2\,ds} =$$

нер-во Гельдера

$$= \sqrt{\pi}\left(\int_0^\pi f'^2(s)\,ds\right)^{1/2}$$

$$\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx \le \pi^2 \int_0^\pi f'^2(s)\,ds$$

(т.е. то, что надо, с $(=\pi^2)$)

Подумать, как $\downarrow C$, исп. ряд Фурье.