Принцип наименьшего действия

В лагранжевой механике динамика системы, задаваемой лагранжианом $L(q,\dot{q},t)$, описывается с помощью уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial}{\partial q_i}\right)L(q,\dot{q},t)=0}\,,\quad i=1\ldots N$$

Если система несингулярна, то при задании начальных данных

$$\boxed{q_i(0)=q_i^{(0)}\,,\quad \dot{q}_i(0)=\dot{q}_i^{(0)}}\,,$$

решение уравнения Э.-Л. существует и единственно.

В этой схеме все хорошо, только смущает замысловатый вид дифференциального оператора $\left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial}{\partial q_i}\right)$, действующего на лагранжиан. Хотелось бы связать его с каким-нибудь простым и естественным математическим действием, и это удаётся сделать: такой оператор возникает в задачах об экстремумах функционалов.

Не вдаваясь в тонкости математических формулировок (у вас будет курс вариационного исчисления), мы кратко опишем проблему нахождения экстремума функционала.

Def: Функционалом Ф называется отображение из бесконечномерного пространства функций, (например, функций на отрезке $f(x): [x_1, x_2] \to \mathbb{R}^n$) в $\mathbb{R}$:

$$\Phi[f(x)] : f(x) \to \mathbb{R}$$

Типичный пример функционала — интеграл от функции по отрезку. Например длина кривой $y(x)$, $x \in [a, b]$, является функционалом:

$$\ell[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$$

Так же, как и обычные функции, функционалы можно дифференцировать (обычно, это называется варьированием), и искать их экстремумы. Для этого на пространстве функций надо ввести норму. Уточним:

Обычно, пространство рассматриваемых функций является аффинным. Примерами: пространство функций $f(x): [a, b] \to \mathbb{R}$ с фиксированными значениями на границах: $f(a) = f_1$, $f(b) = f_2$. Разности элементов такого пространства $f(x) - g(x)$ образуют векторное пространство: $(f-g)(a) = (f-g)(b) = 0$. Для определения дифференцирования как раз нужны разности.

Def: Векторное пространство функций (бесконечномерное), снабженное нормой и полное в этой норме называется банаховым.

Пример: стандартный пример нормы на пространстве к раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ — $C^k[a,b]$:

$$\|f\| = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$$

В этой норме пространство $C^k[a,b]$ является полным.

Def Функционал $\Phi[f(x)]$, определенный на аффинном пространстве функций $\mathcal{F}$ ($f(x)\in\mathcal{F}$) называется дифференцируемым в точке $f_0(x)$, если $\forall$ ф-ции $(f_0+\delta f)(x)\in\mathcal{F}$ ($\delta f(x)$ — уже элемент банахова пространства)

$$\boxed{\Phi[(f_0+\delta f)(x)] = \Phi[f_0(x)] + \delta\Phi_{f_0}[\delta f(x)] + o(\|\delta f\|)} \quad (1)$$

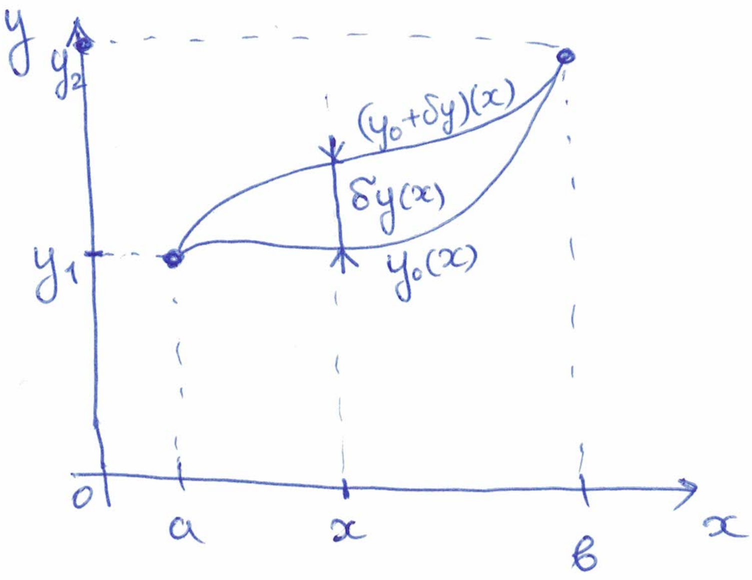
Здесь $\delta\Phi_{f_0}[\delta f(x)]$ — непрерывный, линейный функционал на банаховом пространстве функций $\delta f(x)$; $o(\|\delta f\|)$ — "о-малое", т.е. такой элемент, что $\frac{o(\|\delta f\|)}{\|\delta f\|} \xrightarrow{\|\delta f\| \to 0} 0$

Линейный функционал $\delta\Phi_{f_0}[\delta f(x)]$ называется дифференциалом (или вариацией) функционала $\Phi[f(x)]$ в точке $f_0(x)$.

Рассмотрим пример дифференцирования функционала

$$\boxed{\Phi[y(x)] = \int_a^b L(y(x), y'(x), x)\,dx}\,, \quad (2)$$

заданного на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $x \in [a, b]$, с фиксированными значениями на концах $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$. Их разности $\delta y(x)$ — элементы банахова пространства $C^2[a, b]$.



$L(y, y', x)$ — заданная достаточно гладкая функция своих аргументов.

Вычислим $\delta\Phi_{y_0}[\delta y(x)]$, разлагая $L(y,y',x)$ в ряд по ее аргументам y и y' в окрестности y_0 и y_0': (5)

$$\delta\Phi_{y_0}[\delta y(x)] = \Phi[(y_0+\delta y)(x)] - \Phi[y_0(x)] + o(\|\delta y\|) =$$

$$= \int_a^b L(y_0+\delta y, y_0'+\delta y', x)\,dx - \int_a^b L(y_0, y_0', x)\,dx + o(\|\delta y\|) =$$

$$= \boxed{\int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial y}(y_0,y_0',x)\cdot\delta y(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(y_0,y_0',x)(\delta y(x))' \right\} dx} \quad (3a)$$

это $\delta\Phi_{y_0}[\delta y(x)]$ — линейный по $\delta y(x)$ функционал /заметим, $(\delta y(x))'$, очевидно, линеен по $\delta y(x)$/.

Дифференциал $\delta\Phi_{y_0}$ вычислен, но в неудобном виде. Преобразуем к более удобному виду, проинтегрировав второе слагаемое по частям:

$$\boxed{\delta\Phi_{y_0}[\delta y(x)]} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial y}(y_0,y_0',x)\,\delta y(x) + \left(\frac{\partial L}{\partial y'}(y_0,y_0',x)\delta y(x)\right)' - \left(\frac{\partial L}{\partial y'}(y_0,y_0',x)\right)'\delta y(x) \right\} dx =$$

$$= \boxed{\int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial y}(y_0,y_0',x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(y_0,y_0',x)\right) \right\} \delta y(x)\,dx + \frac{\partial L}{\partial y'}(y_0,y_0',x)\,\delta y(x)\Big|_{x=a}^{x=b}} \quad (3б)$$

В подинтегральном выражении (3б) мы узнаем дифференциальный оператор из уравнения Эйлера – Лагранжа: $\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx}\circ\frac{\partial}{\partial y'}\right) L(y, y', x)$.

Кроме того, формула (3б) подходит для анализа условий зануления функционала $\delta\Phi$

Def: Функция $y_0(x)$ называется <u>экстремалью</u> функционала $\Phi[y(x)]$, если

$$\boxed{\delta \Phi_{y_0} [\delta y(x)] \equiv 0} \qquad (4)$$

<u>Утверждение</u>: Экстремалью функционала (2) на пространстве функций с фиксированными значениями на концах $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$ является решение дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\right) L(y, y', x) = 0 \qquad (5a)$$

с граничными условиями

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2 \qquad (5б)$$

<u>Других экстремалей у функционала (2) нет.</u>

<u>Док-во</u>: Мы докажем лишь первую часть утверждения. Доказательство второй части можно посмотреть в книге В.И. Арнольда "Мат. методы классической механики" §12.

Первая часть утверждения очевидна: условие (5а) зануляет интеграл в формуле для $\delta\Phi$ (3б), а

фиксация значений функции $y(x)$ на границах (7)
приводит к тому, что $\delta y\big|_{x=a} = \delta y\big|_{x=b} = 0$,
что зануляет оставшийся граничный член в формуле (3б) ▨

Rem: Заметим, что если бы мы рассматривали пространство функций $y(x)$ без ограничений на значения на границах $x=a$, $x=b$, то для зануления дифференциала (3б) нам бы потребовалось решить дифур (5а) с такими условиями на границах:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial y'}(y, y', x)\bigg|_{x=a} = \frac{\partial L}{\partial y'}(y, y', x)\bigg|_{x=b} = 0} \quad (5б)$$

Это потому, что теперь на границах $\delta y(a)$ и $\delta y(b)$ — совершенно произвольны

Утверждение об экстремалях функционала (2) позволяет переформулировать законы динамики механических систем в следующем виде:

Def Функционал

$$\boxed{S[q_\alpha(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot q(t), t)\, dt,} \quad (6)$$

где $L(q, \dot q, t)$ — лагранжиан мех. системы, называется действием механической системы

Принцип наименьшего действия:

Движение механической системы происходит по траектории, являющейся экстремалью её функционала действия.

При этом предполагается (как правило), что поиск экстремали происходит на пространстве траекторий с фиксированными значениями координат в начальный и конечный моменты времени

$$\boxed{q_\alpha(t_0) = q_{\alpha,0} \; ; \; q_\alpha(t_1) = q_{\alpha,1}} \qquad (7)$$

<u>Rem</u>: Заметим, что принцип наименьшего действия даёт уравнения Эйлера–Лагранжа, но не с привычными в физике <u>начальными</u> условиями: $q_\alpha(t_0)=q_{\alpha,0}$, $\dot{q}_\alpha(t_0)=\dot{q}_{\alpha,0}$, гарантирующими единственность решения, а с <u>граничными</u> условиями (7), которые <u>не гарантируют</u> единственности решения задачи. Этим логическим скачком физики пренебрегают, и получив уравнения Э.–Л. из принципа наименьшего действия, решают их с начальными условиями. В ситуации общего положения начальные и граничные условия приводят к одному ответу.

<u>Историческая справка</u>: принцип наименьшего действия вырабатывался в новой истории в течение ~ 200 лет.

* 1662 г Пьер Ферма отметил, что при преломлении луч света движется по кратчайшему (по времени путешествия) пути
* конец 17 века: появление вариационных задач, (задача о брахистохроне). Ньютон, Лейбниц и др. формулируют основы вариационного исчисления.
* середина 18 века, Монертюи и Эйлер переносят принцип наименьшего действия на механические задачи, ~1760 г. Лагранж пишет труд "Аналитическая механика".
* ~ 1837 г. Якоби применяет вариационное исчисление к поиску геодезических.
* ~ 1834-35 г. Гамильтон формулирует принцип наименьшего действия в его современном виде.

Сейчас этот принцип — основа классической фундаментальной физики.

Принцип наименьшего действия очень просто объясняет два из обсуждавшихся нами на лекции 7 свойств лагранжева формализма:

(A) Тождественность уравнений Э.-Л. для систем с лагранжианами $L(q,\dot{q},t)$ и $L^{(\Lambda)} = L(q,\dot{q},t) + \frac{d\Lambda(q,t)}{dt}$ при $\forall\, \Lambda(q,t)$. Дело в том, что соответствующие функционалы действия $S[q(t)]$ и $S^{(\Lambda)}[q(t)]$ отличаются на константу: $\Lambda(q(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2}$, которая не меняется при варьировании действия и не влияет на поиск его экстремали.

(В) Ковариантность лагранжева формализма при точечных преобразованиях:

$$\{q_\alpha\} \to \{y_\alpha\} \ : \ y_\alpha = y_\alpha(q, t) \qquad (*)$$

Мы можем провести замену координат $(*)$ в функционале действия системы: $S = \int L(y, \dot{y}, t)\,dt = \int L(y(q,t), \dot{y}(q,t), t)\,dt$. При этом поиск экстремали действия $\delta S = 0$, что в координатах $\{y_\alpha\}$, что в координатах $\{q_\alpha\}$, выдаст нам уравнения Эйлера-Лагранжа (в переменных y_α или q_α), решениями которых будет одна и та же экстремаль S.

Обсуждению третьего обсуждавшегося на лекции 7 свойства лагранжева формализма — связи симметрий лагранжиана и интегралов движения системы мы посвятим отдельную лекцию.