Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Каждая плоская алгебраическая кривая определяет другую алгебраическую кривую, которая лежит в двойственной проективной плоскости. Как хорошо известно, *двойственным векторным пространством* к данному векторному пространству $V = \mathbb{C}^n$ называется пространство линейных функционалов $V^\vee = \{f : V \to \mathbb{C}\}$ на V. Проективизация $PV^\vee$ двойственного пространства называется *двойственным проективным пространством* к проективизированному пространству PV.

Каждая плоская алгебраическая кривая определяет другую алгебраическую кривую, которая лежит в двойственной проективной плоскости. Как хорошо известно, *двойственным векторным пространством* к данному векторному пространству $V = \mathbb{C}^n$ называется пространство линейных функционалов $V^\vee = \{f : V \to \mathbb{C}\}$ на V.
Проективизация $PV^\vee$ двойственного пространства называется *двойственным проективным пространством* к проективизированному пространству PV.
В свою очередь, каждой точке $v \in V$ пространства V соответствует линейный функционал на двойственном пространстве $V^\vee$: мы полагаем $v(f) = f(v)$. Это соответствие отождествляет V с $(V^\vee)^\vee$ и, в свою очередь, PV с $(PV^\vee)^\vee$.

Каждой точке f двойственного проективного пространства $PV^{\vee}$ соответствует гиперплоскость в пространстве V. Эта гиперплоскость состоит из нулей функционала f, определенного с точностью до умножения на ненулевую константу.

Каждой точке f двойственного проективного пространства $PV^\vee$ соответствует гиперплоскость в пространстве V. Эта гиперплоскость состоит из нулей функционала f, определенного с точностью до умножения на ненулевую константу.
В частности, точки проективной плоскости, двойственной к данной, находятся во взаимно-однозначном соответствии с прямыми на исходной плоскости.

Definition

Пусть $C \subset \mathbb{C}P^2$ — плоская алгебраическая кривая. Двойственной кривой $C^\vee$ в двойственной проективной плоскости называется кривая, образованная касательными к кривой C.

Theorem

Кривая, двойственная к двойственной, естественно отождествляется с исходной кривой, $(C^\vee)^\vee = C$.

Доказательство.

Theorem

Кривая двойственная к гладкой алгебраической является алгебраической.

Доказательство. Каждой алгебраической кривой $C \subset PV = \mathbb{C}P^2$ можно сопоставить кривую $\hat{C}$ в произведении $PV \times PV^\vee$ проективной плоскости и двойственной к ней, состоящую из пар (точка кривой C, касательная к C в этой точке). Кривая $\hat{C}$ называется *конормальной разверткой* кривой C; она алгебраическая. Действительно, если $F(x, y, z) = 0$ — уравнение кривой C, то касательная к ней в точке $(x_0 : y_0 : z_0)$ имеет вид

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Поэтому конормальную развертку можно задать уравнениями

$$a = \partial F/\partial x, \qquad b = \partial F/\partial y, \qquad c = \partial F/\partial z, \qquad F = 0,$$

причем последнее уравнение можно заменить более простым $ax + by + cz = 0$, поскольку многочлен F однороден. (Здесь $(a : b : c)$ — проективные координаты в двойственной проективной плоскости.)
Двойственная к C кривая $C^\vee$ — проекция кривой $\hat{C}$ на второй сомножитель — также является алгебраической.

Лекция 7. Формулы Плюккера: двойственная кривая

В качестве примера вычислим двойственные кривые для кубических кривых семейства

$$y^2z - x^3 + \alpha xz^2 = 0.$$

При общем значении параметра α кривая является гладкой.

Уравнения конормальной развертки имеют вид

$$\begin{aligned} a + 3x^2 - \alpha z^2 &= 0 \\ b - 2yz &= 0 \\ c - y^2 - 2\alpha xz &= 0 \\ ax + by + cz &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения конормальной развертки имеют вид

$$\begin{aligned} a + 3x^2 - \alpha z^2 &= 0 \\ b - 2yz &= 0 \\ c - y^2 - 2\alpha xz &= 0 \\ ax + by + cz &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения конормальной развертки имеют вид

$$\begin{aligned} a+3x^2-\alpha z^2 &= 0\\ b-2yz &= 0\\ c-y^2-2\alpha xz &= 0\\ ax+by+cz &= 0. \end{aligned}$$

Выражая x из четвертого уравнения и подставляя результат в первое и третье, получаем систему

$$\begin{aligned} a^3-\alpha a^2z^2+3b^2y^2+6bcyz+3c^2z^2 &= 0\\ b-2yz &= 0\\ ay^2-ac-2\alpha byz-2\alpha cz^2 &= 0. \end{aligned}$$

Выражая y из второго уравнения и подставляя результат в первое и третье, получаем систему

$$\begin{aligned} 4a^3z^2 - 4\alpha a^2z^4 + 12c^4z^4 + 3b^4 &= 0 \\ bc^2 - 4acz^2 - 4\alpha b^2z^2 - 8\alpha cz^4 &= 0. \end{aligned}$$

Выражая y из второго уравнения и подставляя результат в первое и третье, получаем систему

$$\begin{array}{rcl} 4a^3z^2 - 4\alpha a^2z^4 + 12c^4z^4 + 3b^4 & = & 0 \\ bc^2 - 4acz^2 - 4\alpha b^2z^2 - 8\alpha cz^4 & = & 0. \end{array}$$

Наконец, исключая z, получаем уравнение двойственной кривой

$$4a^3c^3 + 27b^2c^4 - \alpha(\alpha a^4b^2 + 24\alpha ab^4c + 30a^2b^2c^2 + 4a^5c + 4\alpha^2b^6) = 0.$$

Это кривая степени 6. Степень $d^\vee$ двойственной кривой $C^\vee$ называется *классом* плоской алгебраической кривой C.

Выражая y из второго уравнения и подставляя результат в первое и третье, получаем систему

$$\begin{array}{rcl} 4a^3z^2 - 4\alpha a^2z^4 + 12c^4z^4 + 3b^4 & = & 0 \\ bc^2 - 4acz^2 - 4\alpha b^2z^2 - 8\alpha cz^4 & = & 0. \end{array}$$

Наконец, исключая z, получаем уравнение двойственной кривой

$$4a^3c^3 + 27b^2c^4 - \alpha(\alpha a^4b^2 + 24\alpha ab^4c + 30a^2b^2c^2 + 4a^5c + 4\alpha^2b^6) = 0.$$

Это кривая степени 6. Степень $d^\vee$ двойственной кривой $C^\vee$ называется *классом* плоской алгебраической кривой C.
При $\alpha = 0$ уравнение двойственной кривой вырождается в уравнение $c^3(4a^3 + 27b^2c) = 0$.
Прямая $c = 0$ является “лишней”, и двойственной кривой к полукубической параболе $x^3 = y^2z$ является полукубическая парабола $4a^3 + 27b^2c = 0$. В частности, класс полукубической параболы равен 3.

Лекция 7. Формулы Плюккера: двойственная кривая

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Theorem

Класс гладкой плоской алгебраической кривой степени d равен $d(d-1)$.

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Theorem

Класс гладкой плоской алгебраической кривой степени d равен $d(d-1)$.

Corollary

Кривая, двойственная гладкой плоской алгебраической кривой степени $d \geq 3$, не может быть гладкой.

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Theorem

Класс гладкой плоской алгебраической кривой степени d равен $d(d-1)$.

Corollary

Кривая, двойственная гладкой плоской алгебраической кривой степени $d \geq 3$, не может быть гладкой.

Доказательство теоремы. Степень двойственной кривой это число точек ее пересечения с общей прямой в двойственной проективной плоскости. Прямая в двойственной проективной плоскости состоит из прямых в исходной плоскости, проходящих через данную точку. Как мы знаем, из данной общей точки вне кривой к плоской алгебраической кривой степени d можно провести $d(d-1)$ касательных. Они и являются точками пересечения прямой с двойственной кривой.

Класс гладкой кривой данной степени легко вычислить.

Theorem

Класс гладкой плоской алгебраической кривой степени d равен $d(d-1)$.

Corollary

Кривая, двойственная гладкой плоской алгебраической кривой степени $d \geq 3$, не может быть гладкой.

Доказательство теоремы. Степень двойственной кривой это число точек ее пересечения с общей прямой в двойственной проективной плоскости. Прямая в двойственной проективной плоскости состоит из прямых в исходной плоскости, проходящих через данную точку. Как мы знаем, из данной общей точки вне кривой к плоской алгебраической кривой степени d можно провести $d(d-1)$ касательных. Они и являются точками пересечения прямой с двойственной кривой.
Доказательство следствия. Если бы двойственная кривая была гладкой, то двойственная к ней кривая не могла бы иметь степень d.

Особенности у кривой, двойственной к данной общей гладкой кривой, бывают двух различных типов. Особенности первого типа соответствуют двойным касательным к исходной кривой. Эти особенности — точки самопересечения двойственной кривой. Особенности второго типа отвечают точкам перегиба исходной кривой. Как мы видели для случая полукубической параболы, эти особенности — точки возврата (каспы).

Лекция 7. Формулы Плюккера: двойственная кривая

Особенности у кривой, двойственной к данной общей гладкой кривой, бывают двух различных типов. Особенности первого типа соответствуют двойным касательным к исходной кривой. Эти особенности — точки самопересечения двойственной кривой. Особенности второго типа отвечают точкам перегиба исходной кривой. Как мы видели для случая полукубической параболы, эти особенности — точки возврата (каспы).

Theorem

Кривая, двойственная общей гладкой плоской алгебраической кривой степени d, имеет $3d(d-2)$ каспов.

Действительно, на общей гладкой кривой степени d есть $3d(d-2)$ точек перегиба.

Полученные результаты позволяют вычислить количество точек самопересечения двойственной кривой, т.е. количество двойных касательных к исходной кривой.

Theorem

Количество двойных касательных к общей гладкой плоской алгебраической кривой степени d равно

$$\frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3).$$

В частности, у кубической кривой нет двойных касательных (что мы и так знали), а у кривой степени $d=4$ их 28.

Полученные результаты позволяют вычислить количество точек самопересечения двойственной кривой, т.е. количество двойных касательных к исходной кривой.

Theorem

Количество двойных касательных к общей гладкой плоской алгебраической кривой степени d равно

$$\frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3).$$

В частности, у кубической кривой нет двойных касательных (что мы и так знали), а у кривой степени $d=4$ их 28.

Доказательство. Каждое самопересечение и каждый касп понижают род (нормализации) кривой на 1. Род конормальной развертки $\hat{C}$ совпадает с родом кривой C и равен $(d-1)(d-2)/2$. Поэтому количество двойных точек на двойственной кривой равно

$$\frac{1}{2}((d(d-1)-1)(d(d-1)-2)-\frac{1}{2}(d-1)(d-2)-3d(d-2) \quad = \quad \frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3).$$

Лекция 7. Формулы Плюккера: двойственная кривая

Двойственная кривая к гладкой плоской алгебраической кривой имеет особенности — точки простого самопересечения и точки возврата. В свою очередь, кривая двойственная к ней — гладкая. Не расширяя списка допустимых особенностей, можно распространить формулы Плюккера на более широкую ситуацию, когда не только двойственной кривой, но и исходной разрешается иметь точки двойного самопересечения и точки возврата. Конормальная развертка $\hat{C}$ при этом остается гладкой.

Двойственная кривая к гладкой плоской алгебраической кривой имеет особенности — точки простого самопересечения и точки возврата. В свою очередь, кривая двойственная к ней — гладкая. Не расширяя списка допустимых особенностей, можно распространить формулы Плюккера на более широкую ситуацию, когда не только двойственной кривой, но и исходной разрешается иметь точки двойного самопересечения и точки возврата. Конормальная развертка $\hat{C}$ при этом остается гладкой.

Пусть d — степень кривой C, δ — число ее точек самопересечения, κ — число ее точек возврата, а $d^\vee, \delta^\vee, \kappa^\vee$ — аналогичные параметры двойственной кривой $C^\vee$. Род конормальной развертки $\hat{C}$ — общей нормализации кривых C и $C^\vee$ — дается формулой

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \delta - \kappa = \frac{1}{2}(d^\vee - 1)(d^\vee - 2) - \delta^\vee - \kappa^\vee.$$

Theorem

Справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
d^\vee &= d(d-1) - 2\delta - 3\kappa \\
d &= d^\vee(d^\vee - 1) - 2\delta^\vee - 3\kappa^\vee \\
\kappa^\vee &= 3d(d-2) - 6\delta - 8\kappa \\
\kappa &= 3d^\vee(d^\vee - 2) - 6\delta^\vee - 8\kappa^\vee.
\end{aligned}
$$

Theorem

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} d^\vee &= d(d-1) - 2\delta - 3\kappa \\ d &= d^\vee(d^\vee - 1) - 2\delta^\vee - 3\kappa^\vee \\ \kappa^\vee &= 3d(d-2) - 6\delta - 8\kappa \\ \kappa &= 3d^\vee(d^\vee - 2) - 6\delta^\vee - 8\kappa^\vee. \end{aligned}$$

Эти четыре равенства не являются независимыми. Любое из них является следствием остальных трех.

Доказывать формулы Плюккера можно так же, как и для гладкой кривой C. Следующее рассуждение, однако, носит более общий характер и проясняет геометрическую природу формул. Рассмотрим однопараметрическое семейство $F_t(x, y, z)$ однородных многочленов степени d, являющееся деформацией многочлена F_0, такое, что кривая $F_t = 0$ является неособой при малых t, отличных от 0. Из точки $P \in \mathbb{C}P^2$ общего положения можно провести $d(d-1)$ касательных к кривой $C_t = \{(x : y : z) | F_t(x, y, z) = 0\}$, $t \neq 0$. При $t \to \infty$ часть из этих касательных стремятся к касательным к кривой C, в то время как остальные стремятся к прямым, соединяющим P с точками самопересечения и каспами кривой C (“исчезают” в этих точках). Аналогично, некоторые точки перегиба кривых C_t стремятся к точками перегиба кривой $C = C_0$, тогда как остальные стремятся к ее особым точкам.

Доказывать формулы Плюккера можно так же, как и для гладкой кривой C. Следующее рассуждение, однако, носит более общий характер и проясняет геометрическую природу формул. Рассмотрим однопараметрическое семейство $F_t(x, y, z)$ однородных многочленов степени d, являющееся деформацией многочлена F_0, такое, что кривая $F_t = 0$ является неособой при малых t, отличных от 0. Из точки $P \in \mathbb{C}P^2$ общего положения можно провести $d(d-1)$ касательных к кривой $C_t = \{(x : y : z) | F_t(x, y, z) = 0\}$, $t \neq 0$. При $t \to \infty$ часть из этих касательных стремятся к касательным к кривой C, в то время как остальные стремятся к прямым, соединяющим P с точками самопересечения и каспами кривой C (“исчезают” в этих точках). Аналогично, некоторые точки перегиба кривых C_t стремятся к точками перегиба кривой $C = C_0$, тогда как остальные стремятся к ее особым точкам.

Lemma

В общем положении

- *в точке простого самопересечения кривой C исчезает две касательные из данной точки и шесть точек перегиба кривых C_t;*
- *в точке возврата кривой C исчезает три касательные из данной точки и восемь точек перегиба кривых C_t.*

Лекция 7.

- Найдите двойственную кривую к эллипсу
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
- Найдите двойственную кривую к объединению двух эллипсов
$$\frac{x^2}{a^2} + a^2y^2 = 1 \qquad \text{и} \qquad a^2x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$
- Пусть C — выпуклая кривая на вещественной проективной плоскости. Докажите, что двойственная к ней кривая тоже выпукла.

Семинар 7. Задачи

- Найдите двойственную кривую к кривой
$$y^2z^2 - x^2(z^2 - x^2) = 0.$$
Вычислите характеристики этой кривой.
- Найдите двойственную кривую к лемнискате
$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)z^2.$$
Вычислите характеристики этой кривой.
- Пусть C — общая плоская кривая степени 4, класс которой равен 4. Сколько особенностей каждого типа имеют кривые C и $C^\vee$? Существует ли такие двойственные кривые C и $C^\vee$?

Семинар 7. Задачи

Семинар 7. Задачи