Семинар 20

Норма и след. Все расширения предполагаются сепарабельными.

1 *. Гомоморфизм группы G в мультипликативную группу поля F назовем характером группы G. Пусть $\chi_1, \dots \chi_r$ – различные характеры группы G в поле F. Доказать их линейную независимость над F(лемма Артина) (С: индукция по r).

Рассмотрим раширение F степени n над полем K. Обозначим через $a_1 = a, a_2, \dots, a_n$ элементы из алгебраического замыкания поля K, сопряженные с элементом $a \in F$ над полем K (в последовательности a_i могут быть повторения). Назовем следом $Tr(a)$ элемента a над полем K сумму всех a_i, $(i = 1, \dots, n)$, а их произведение назовем нормой $N(a)$ элемента a над полем K.

2. Доказать, что норма – это гомомофизм мультипликативной группы поля F в мультипликативную группу поля K, а след– это линейный функционал на векторном пространстве F над K.

3. С помощью леммы Артина (или по-другому) докажите, что линейный функционал следа не равен тождественно 0.

4. Если поле K конечно, то покажите, что оба отображения след и норма сюръективны.

5. Рассмотрите на поле F как векторном пространстве над K билинейную симметрическую форму $(x, y) = Tr(xy), x, y \in F$ и докажите ее невырожденность.

6. Рассмотрим раширение F степени n над полем K. Доказать,что:

а) для произвольного $a \in F$ отображение $f \to af$, $f \in F$ является линейным преобразованием F как линейного пространства над K;

б) характеристический многочлен этого линейного преобразования равен степени минимального многочлена(со старшим коэффициентом 1) элемента a над полем K (С: сначала рассмотреть случай простого расширения).

Определитель линейного преобразования из задачи 1 называется нормой $N(a)$ элемента a над полем K, а его след $Tr(a)$ – следом элемента a.

7. Попробуйте доказать эквивалентность двух определений нормы и следа.