

## Семинар 21

### Задачи для подготовки к экзамену

1. Пусть  $\sigma$  – автоморфизм поля  $E$ . Дано, что  $\sigma^4 = 1$ , а  $\sigma(e) + \sigma^3(e) = e + \sigma^2(e)$  для всех  $e \in E$ . Доказать, что  $\sigma^2 = 1$ .
2. Рассмотрим вещественное квадратичное поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$  как двумерное векторное пространство над полем  $\mathbb{Q}$  и билинейную форму  $Tr(xy)$ , заданную на этом пространстве. Определите сигнатуру ассоциированной квадратичной формы.
3. Сколько неприводимых множителей содержится в разложении многочлена  $X^{255} - 1$  над полем рациональных чисел и какие у них степени?
4. Сколько неприводимых множителей содержится в разложении многочлена  $X^{255} - 1$  над полем из двух элементов и какие у них степени?
5. Пусть  $F$  – поле из  $q$  элементов. Предположим, что  $q - 1$  делится на  $n$ . Тогда для ненулевого элемента  $a \in F$  уравнение  $x^n = a$  либо не имеет решений, либо имеет  $n$  решений. При этом множество тех элементов  $a$ , для которых уравнение разрешимо, является подгруппой. Сколько элементов в этой подгруппе?
6. Описать подгруппу квадратов в конечном поле характеристики 2.
7. Нарисовать граф вложений подполей поля из 4096 элементов.
8. Найти степень над  $\mathbb{Q}$  поля разложения многочлена  $(X^3 - 5)(X^3 - 7)$ .
9. Доказать, что поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  не изоморфно полю  $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ .
10. Доказать, что конечная область целостности является полем.