Задача 2 (из листка для подготовки к контрольной)

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{t+x-3}{t-x+1} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Решение

Если бы $\dot{x} = \dfrac{t+x}{t-x}$, то это однор. ур-е.

К сожалению, у нас не такое, а

$$\dot{x} = \frac{t+x-3}{t-x+1}$$

Идея $x \rightsquigarrow z$, $t \rightsquigarrow y$ так, чтобы привести ур-е к однор.

$y = t - 2$

$z = x - 1$

$t + x - 3 = y + 2 + z + 1 - 3$

$= y + z$

$t - x - 1 = y + \cancel{2} - z - \cancel{1} - 1 = y - z$

$$\frac{t + x - 3}{t - x - 1} \Leftrightarrow \frac{y + z}{y - z}$$

$z = z(y)$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dy} = \dot{x} \cdot \cancel{\frac{d}{dy}(y+2)}^{1} =$$

$= \dot{x}$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y+z}{y-z} \qquad \text{ур-е}$$

$$z(y_0) = x(t_0 - 2) - 1.$$

$$z(y_0 + 2) = x(t_0) - 1 = x_0 - 1.$$

[illegible]
$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dy} = \dfrac{y+z}{y-z} \\[2ex] z(t_0) = x_0 - 1. \end{cases}$$

равно ли е решени
не одна[illegible] [illegible] [illegible]

Задача 3 (из листка для подготовки к контрольной)

$$\begin{cases} (t+1)\dot{x} - 2x = (t+1)^3 & (3.1) \\ x(t_0) = x_0. & (3.1') \end{cases}$$

Решение

Лин. ОДУ (такое, как в общей теории)

1). $$\dot{x} = \frac{2x}{t+1} + (t+1)^2 \qquad (3.2)$$

Важно. (3.2) и (3.1) не эквивалентны

$t = -1$ в (3.1) $\Rightarrow$ $x(-1) = 0$.

То есть если $x(-1) \neq 0$, то (3.1) эквив. (3.2)

2) Решаем (3.2) — лин. ОДУ.

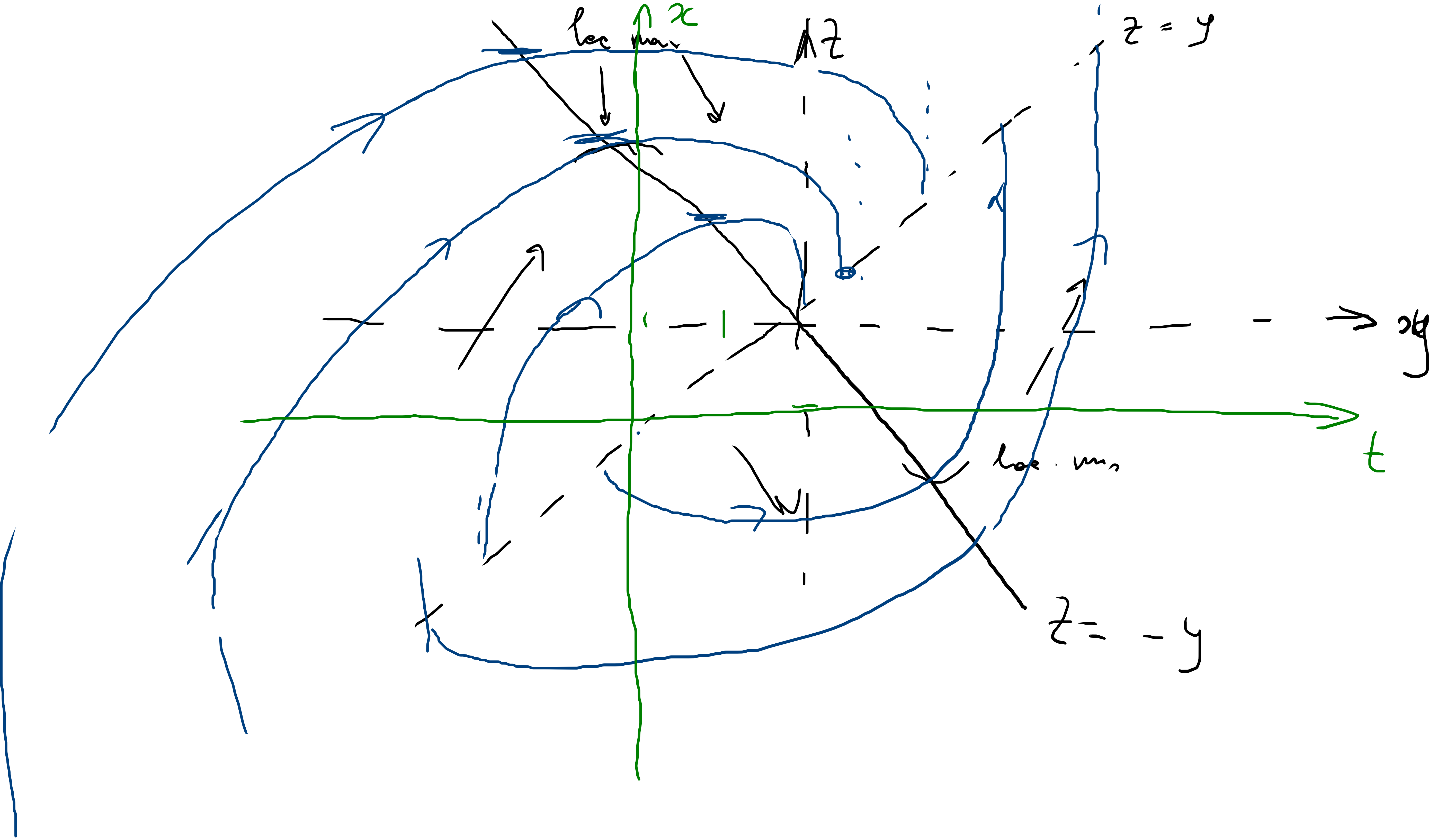
$$D = \big((-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)\big) \times \mathbb{R}$$

т.е. $x_0 \in \mathbb{R}$, а $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Реш. $\exists$, единств. и мах. существ. решения

— если $t_0 < -1$, то $(-\infty, -1)$

— если $t_0 > -1$, то $(-1, +\infty)$



loc max
x
z
z = y
xy
t
loc. min
z = -y
1

3) Решим (3.2)

$$\dot{x} = \frac{2x}{t+1} + (t+1)^2$$

$$x(t) = u(t)v(t)$$

$$\dot{u}v + \dot{v}u = \frac{2uv}{t+1} + (t+1)^2$$

$$v\cancel{\left(\dot{u} - \frac{2u}{t+1}\right)} + \dot{v}u = (t+1)^2$$

(!) какое-нибудь

Подберем u так, чтобы

$$\dot{u} - \frac{2u}{t+1} = 0.$$

$$\frac{\dot u}{u} = \frac{2}{t+1} \qquad \frac{du}{u} = \frac{2\,dt}{t+1}$$

$$\ln|u| = 2\ln|t+1| + \cancel{C}.$$

Выберем: $u = (t+1)^2$

$$\dot v\,\cancel{(t+1)^2} = \cancel{(t+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \dot v = 1.$$

$$v = t + C.$$

$$x(t) = u(t)v(t) = (t+1)^2(t+C) = (t+1)^3 + C(t+1)^2.$$

$$x_0 = x(t_0) = (t_0+1)^3 + C\,(t_0+1)^2$$

$$C(t_0, x_0) = \frac{x_0}{(t_0+1)^2} - (t_0+1) \qquad (3.3)$$

Итого $x(t) = (t+1)^3 + C\,(t_0, x_0)\,(t+1)^2$, где $C(t_0, x_0)$ опр-ся ф-лой $(3.3')$.

реш. (3.2), $(3.1')$

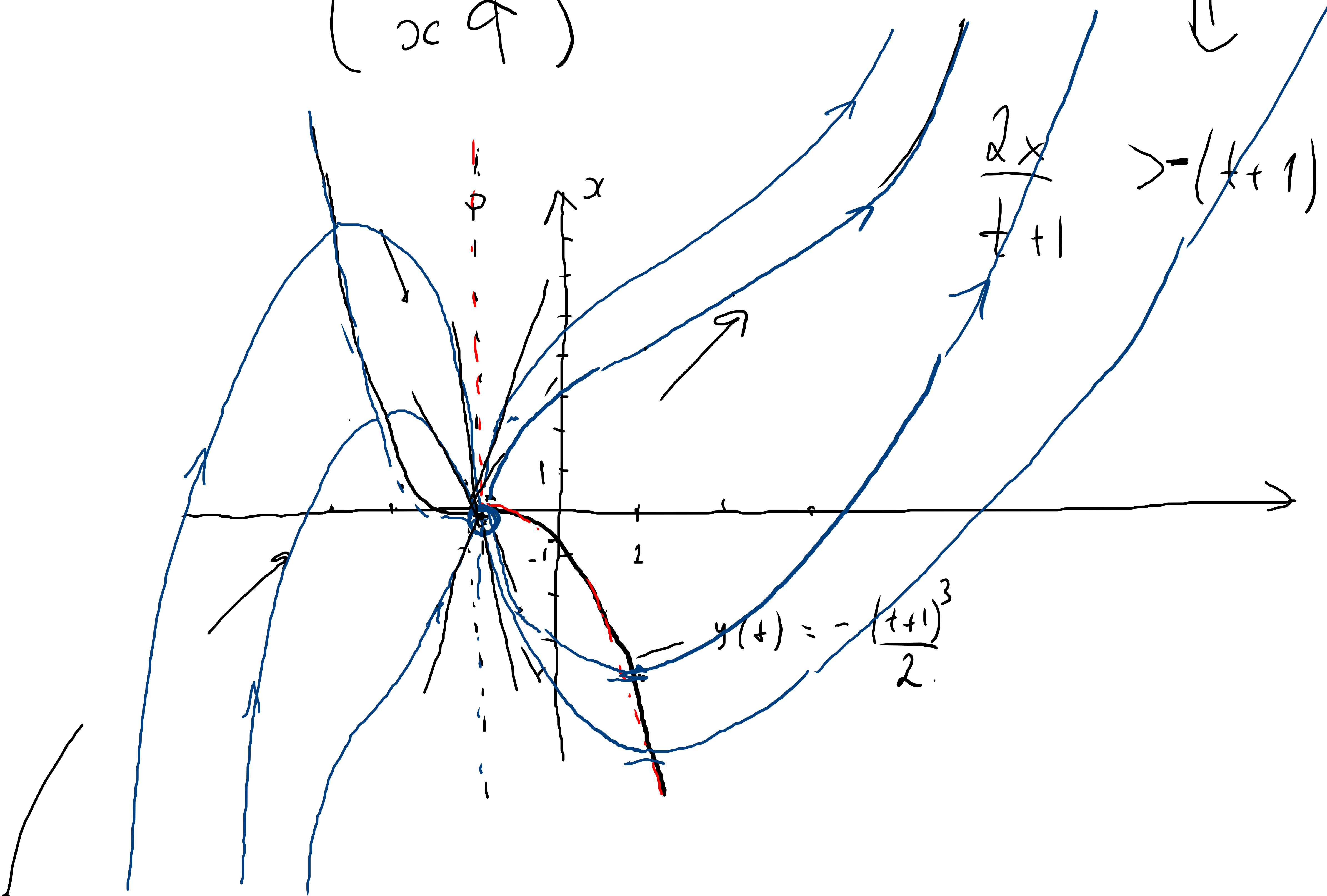
4). Области монотонности траекторий.

$$\dot{x} = \frac{2x}{t+1} - (t+1)^2$$

$$\dot{x} > 0 \iff \frac{2x}{t+1} + (t+1)^2 > 0$$

$(x\,q)$

$$\Updownarrow$$



$$\frac{2x}{t+1} > -(t+1)^2 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -\frac{(t+1)^3}{2} \\ t > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\frac{(t+1)^3}{2} \\ t < -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Сл 1. $t_0 > -1$.

$$x(t) = (t+1)^3 + C(t_0, x_0)(t+1)^2$$

опред. на $(-1, +\infty)$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$$

(более того $x(t) = (t+1)^3 + o(t)$, если $t \to +\infty$.

$$\lim_{t \to -1^-} x(t) = 0$$

$$\dot{x} = 3(t+1)^2 + 2C(t+1) = (t+1)(3t+3+2C)$$

Сл 2. $t < -1$.

$$x(t) = (t+1)^3 + C(t+1)^2$$

опред. на $(-\infty, -1)$

$\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = -\infty$ и более того

$x(t) = (t+1)^3 + o(t)$ при $t \to -\infty$

$$\lim_{t \to -1^-} x(t) = 0$$

б). Уточним характер поведения траекторий вблизи $(-1, 0)$

$t + 1 > 0 \qquad \dot{x}(t) > 0 \Rightarrow t > -1 - \frac{2}{3} C(t_0, x_0).$

$$x(t) = (t+1)^3 + c\,(t+1)^2$$

$$\dot{x} = (t+1)(3t+3+2C)$$

$$t \to 0 \qquad \dot{x} \longrightarrow 1 \cdot (3+2C)$$

$$\lim_{t \to 0^{\pm}} \dot{x}(t) = 3 + 2C(t_0, x_0)$$