# Лин. системы

Однородная

$$\begin{cases} y'(x) = P(x)\,y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$)

$P(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (или $\mathbb{C}^{n \times n}$)

$x_0 \in (a, b)$, $\quad y_0 \in \mathbb{R}^n$

$P \in C((a,b); \mathbb{R}^{n \times n})$

$y' = P(x)\,y$ ур-е имеет <u>ровно $n$</u> лин. незав. решений

$y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$

$$Y(\cdot) = \left[\, y_1(\cdot) \,\middle|\, y_2(\cdot) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, y_n(\cdot) \,\right]$$

$$Y'(x) = P(x)\,Y(x) \qquad Y(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$W(x) := \det Y(x)$$

Ищем: $\underline{W'(x) = ?}$

$$\det(A + \varepsilon T) = \det A + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon}\det(A+\varepsilon T)\Big|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon)$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ обратимая, $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$

$\varepsilon \to 0$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\det(A+\varepsilon T)\Big|_{\varepsilon=0} = \det A \operatorname{Tr}(A^{-1}T)$$

(ф-ла Якоби) $$\det(A+\varepsilon T) = \det A + \varepsilon \det A \operatorname{Tr}(A^{-1}T) + o(\varepsilon)$$

$\varepsilon \to 0$

$$Y'(x) = P(x)\,Y(x) \qquad W(x) = \det Y(x)$$

$\uparrow$ фундам. матрица

$$W'(x) = \frac{d}{dx}\det Y(x) = \det Y(x)\,\mathrm{Tr}\left(Y^{-1}(x)\,Y'(x)\right) =$$

$$= \det Y(x)\,\mathrm{Tr}\Big(\underbrace{Y^{-1}(x)}_{A}\,\underbrace{P(x)\,Y(x)}_{B}\Big) =$$

$\mathrm{tr}\,AB = \mathrm{tr}\,BA$

$$= \det Y(x)\,\mathrm{Tr}\Big(P(x)\,\underbrace{Y(x)\,Y^{-1}(x)}_{= \mathrm{Id}}\Big) =$$

$$= \det Y(x)\,\mathrm{Tr}\,P(x)$$

Итого:

$$W'(x) = W(x)\,\mathrm{Tr}\,P(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{Tr}\,P(s)\,ds}$$

ф-ла Остроградского-Лиувилля.

$$W(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Очень распростр. частн случай:

$$y_k(x_0) = e_k \qquad Y(x_0) = [e_1 | e_2 | \ldots | e_n] = Id.$$

В этом случае $W(x_0) = \det Id = 1$.

$$W(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{Tr}\,P(s)\,ds}$$

# Разбор задач для подготовки к контрольной

$$\begin{cases} y'(y+1) = \dfrac{y}{1+x^2} & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (1') \end{cases}$$

$y' = f(x,y)$

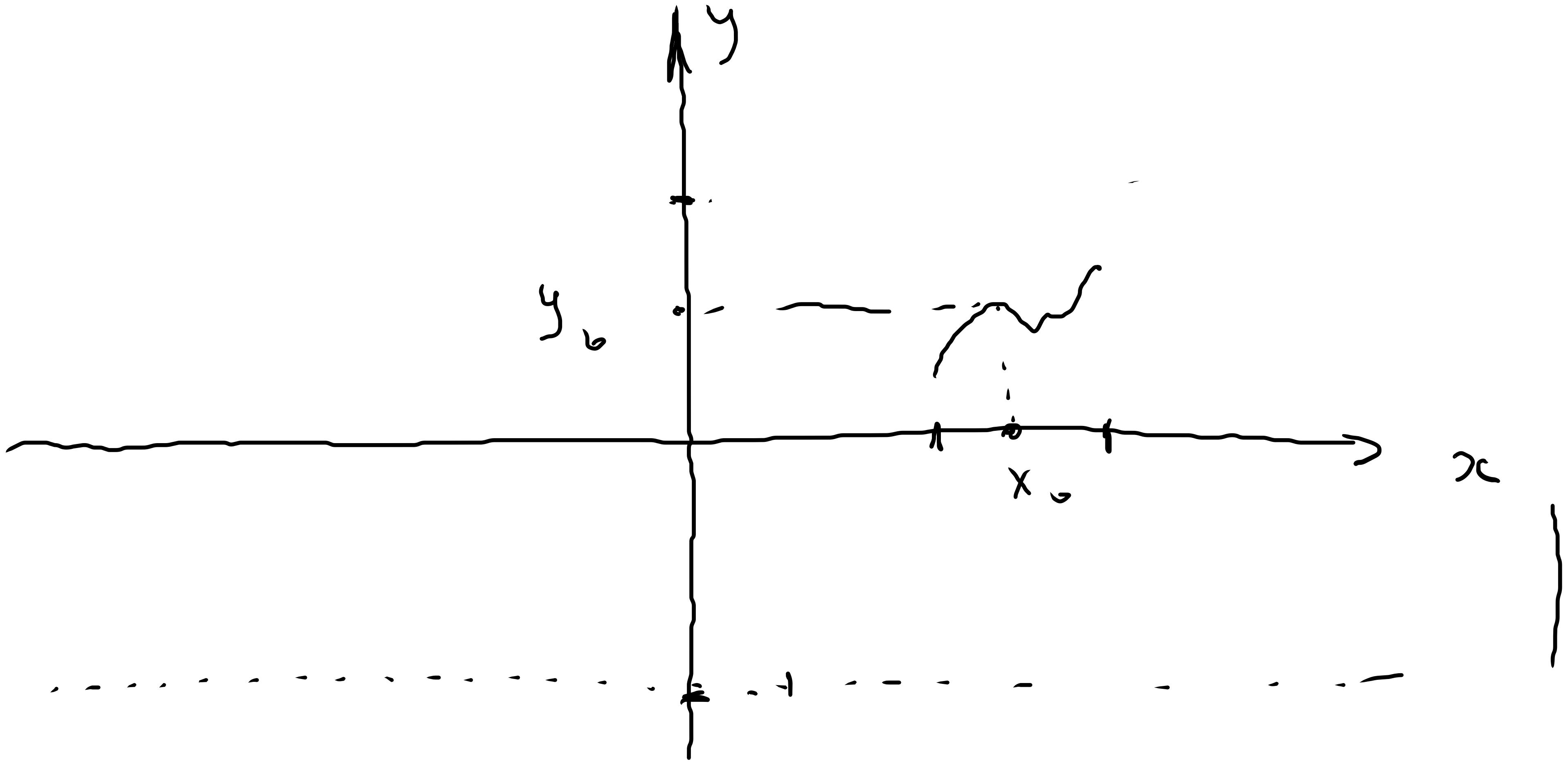
**Решение.**

0). Нахождение $y' = \dfrac{y}{(y+1)(1+x^2)}$ (2).

$y(x) = -1 \Rightarrow (1): \; 0 = \dfrac{-1}{1+x^2}$ — невозможно

$f(x,y) = \dfrac{y}{y+1} \dfrac{1}{1+x^2}$

1). $\mathrm{Dom}\, f = \{ (x,y) : y \neq -1 \}$




2). $f$ непр. всюду на $\mathrm{Dom}\, f$ $\Longrightarrow$ по теор. Пеано реш. (2), (1) (а значит, и (1), (1')) существует локально $\forall (x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}\, f$.

3). $f \in C^1(\mathrm{Dom}\, f)$ (т.е. непр. дифф. на $\mathrm{Dom}\, f$)

В частности $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ существует и непр. в окр-сти любой $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}\, f$

Поэтому по теор. единственности реш. задачи (2), (1') (а значит, и (1), (1'))

единственны $\forall (x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}\, f$.

(N.B: это значит, что траектории НИГДЕ не пересекаются).

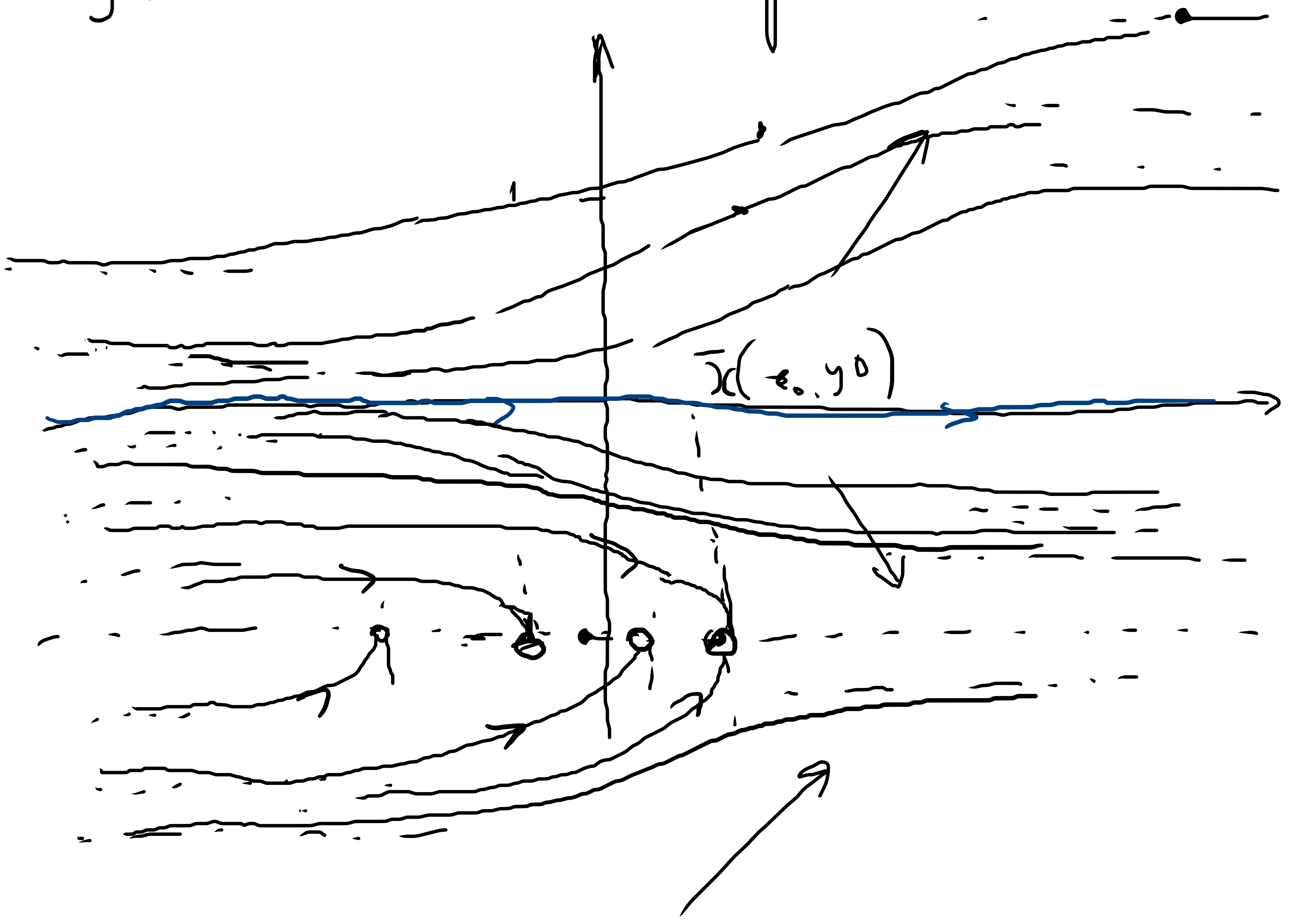
4). Области монотонности.

$y' > 0 \iff \left[\begin{array}{l} y > 0 \\ y < -1 \end{array}\right.$ (функция строго возраст).

$y' < 0 \iff -1 < y < 0$ функция строго убыв.

$y' = 0$ только при $y = 0$

5) $y \equiv 0$ — стац. решение.




6) Из единств. $y_0 > 0 \Rightarrow y(x) > 0$

$-1 < y_0 < 0 \Rightarrow -1 < y(x) < 0$

$y_0 < -1 \Rightarrow y(x) < -1$

7) Решим ур-е (2) $\Leftarrow$ ур-е с раздел. переменными

$$\frac{(y+1)\,dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2}$$

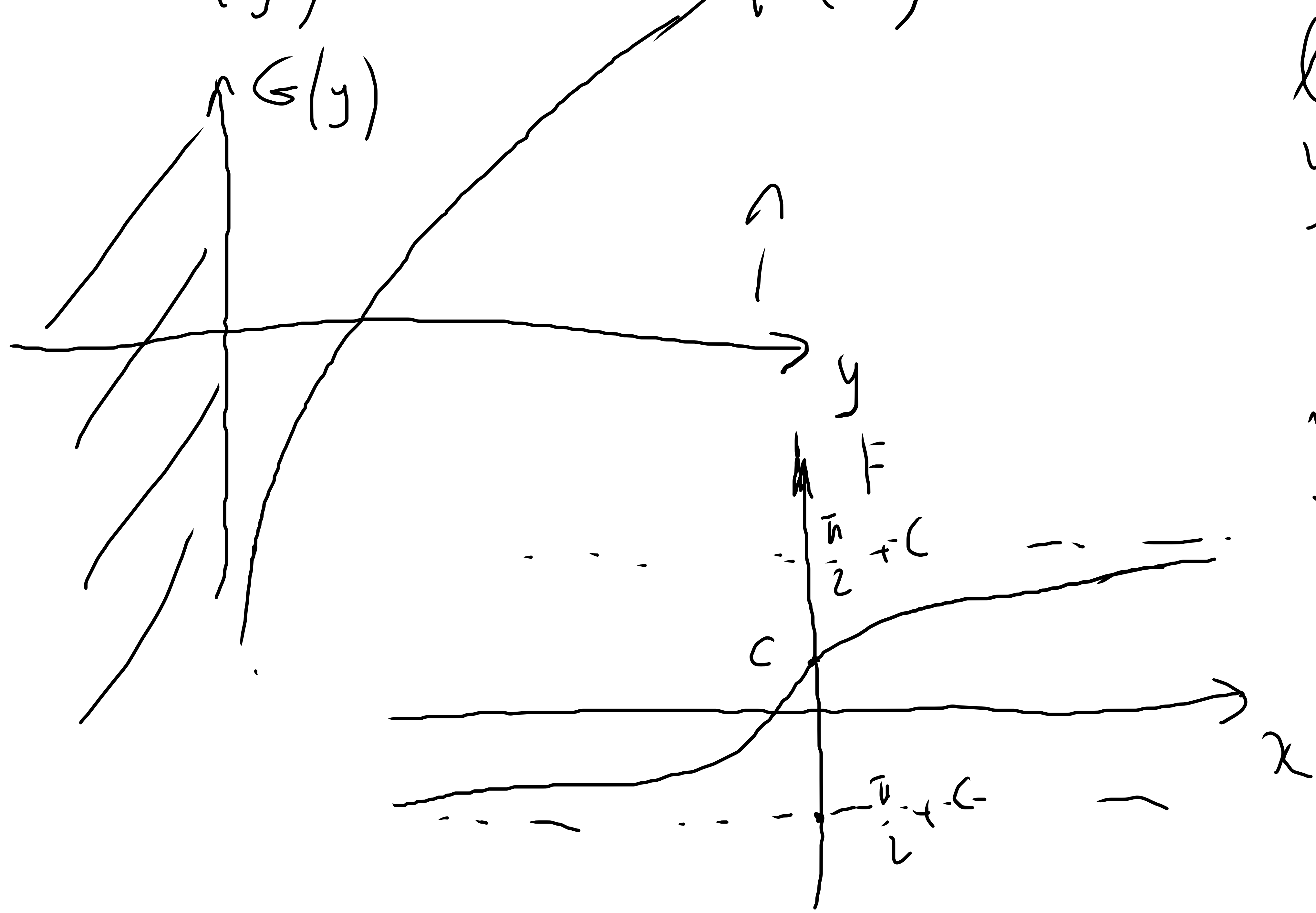
$$\boxed{y + \ln|y| = \operatorname{arctg} x + C}$$

$y_0 + \ln|y_0| = \operatorname{arctg} x_0 + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{C = C(x_0, y_0) = y_0 + \ln|y_0| - \operatorname{arctg} x_0}$$

$$\underbrace{y+\ln y}_{G(y)} = \underbrace{\operatorname{arctg} x + C(x_0,y_0)}_{F(x)}$$

$$G(y) = F(x)$$




$$\lim_{y\to+\infty} G(y) = +\infty$$

$$\lim_{y\to 0^+} G(y) = -\infty$$

$$G'(y) = \frac{y+1}{y} > 0$$

Случай 1. $y_0 > 0 \Rightarrow y(x) > 0$

единств.

$$G(y) = F(x) \qquad G(y) = y + \ln y, \quad F(x) = \operatorname{arctg} x + C$$

$$G(0, +\infty) = \mathbb{R}$$
$$\cup$$
$$F(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2} + C, \frac{\pi}{2} + C\right)$$

$y(x)$ опред. $\forall x \in \mathbb{R}$, т.е. max непрерывная существ.

и без вертикальн. асимп.

$y \uparrow \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = G^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + C\right)$

$$\overline{y} = \overline{y}(x_0, y_0) > 0 :$$

$$\overline{y} + \ln \overline{y} = \frac{\pi}{2} + c(x_0, y_0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \overline{y}(x_0, y_0)$$

---

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \underline{y}(x_0, y_0)$$

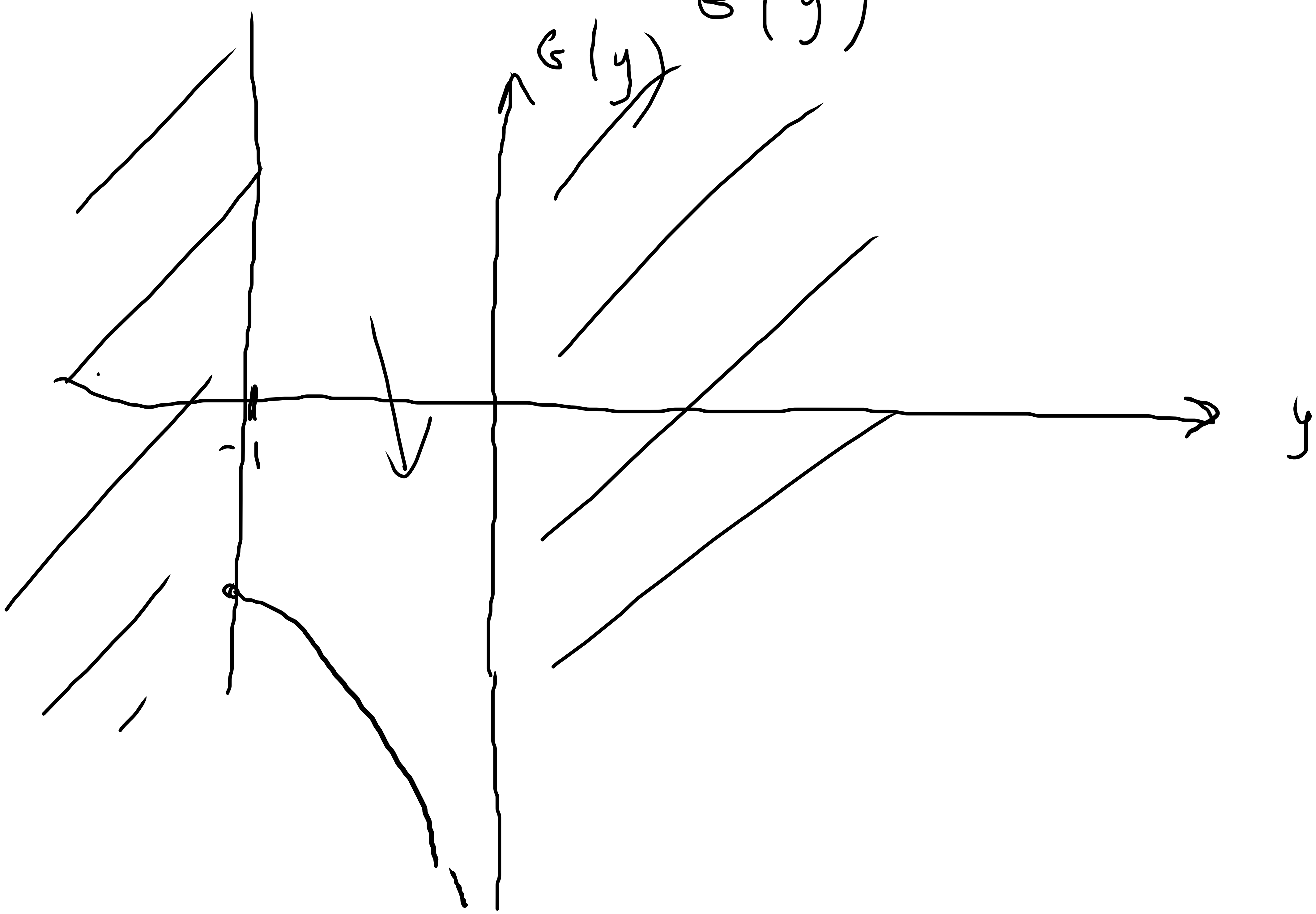
---

$$\underline{y}(x_0, y_0) > 0 :$$

$$\underline{y} + \ln \underline{y} = -\frac{\pi}{2} + c(x_0, y_0)$$

Случай 2 $-1 < y_0 < 0 \Rightarrow -1 < y(x) < 0$

$$\underbrace{y + \ln(-y)}_{G(y)} = \underbrace{\operatorname{arctg} x + C(x_0, y_0)}_{F(x)}$$




$G'(y) = \frac{y+1}{y}$

$\lim\limits_{y \to 0^-} G(y) = -\infty$

$\lim\limits_{y \to -1+0} G(y) = -1$

## Случай 2.1.

$$\frac{\pi}{2} + C(x_0, y_0) \le -1.$$

Тогда ур-е $G(y) = F(x)$ разрешимо $\forall x \in \mathbb{R}$,

т.е. $y(x)$ опред. $\forall x \in \mathbb{R}$

т.е. max интерв. существ. реш — все $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \tilde{y}(x_0, y_0) \qquad \tilde{y} + \ln(-\tilde{y}) = \frac{\pi}{2} + C(x_0, y_0)$$

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \underset{\sim}{y}(x_0, y_0) \qquad \underset{\sim}{y} + \ln(-\underset{\sim}{y}) = -\frac{\pi}{2} + C(x_0, y_0)$$

Случай 2.2. $\frac{\pi}{2} + C(x_0, y_0) > -1$.

Тогда $G(y) = F(x)$ разр. для

$$x \in \left(-\infty, \bar{x}(x_0, y_0)\right)$$

(т.е. реш. опред. на $(-\infty, \bar{x}(x_0, y_0))$)

$$-1 = F(\bar{x}) = \operatorname{arctg} \bar{x} + C(x_0, y_0)$$

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \underline{y} \quad : \quad \underline{y} + \ln(-\underline{y}) = -\frac{\pi}{2} + C(x_0, y_0)$$

$$\lim_{x \to \bar{x}(x_0, y_0)^-} y(x) = -1.$$

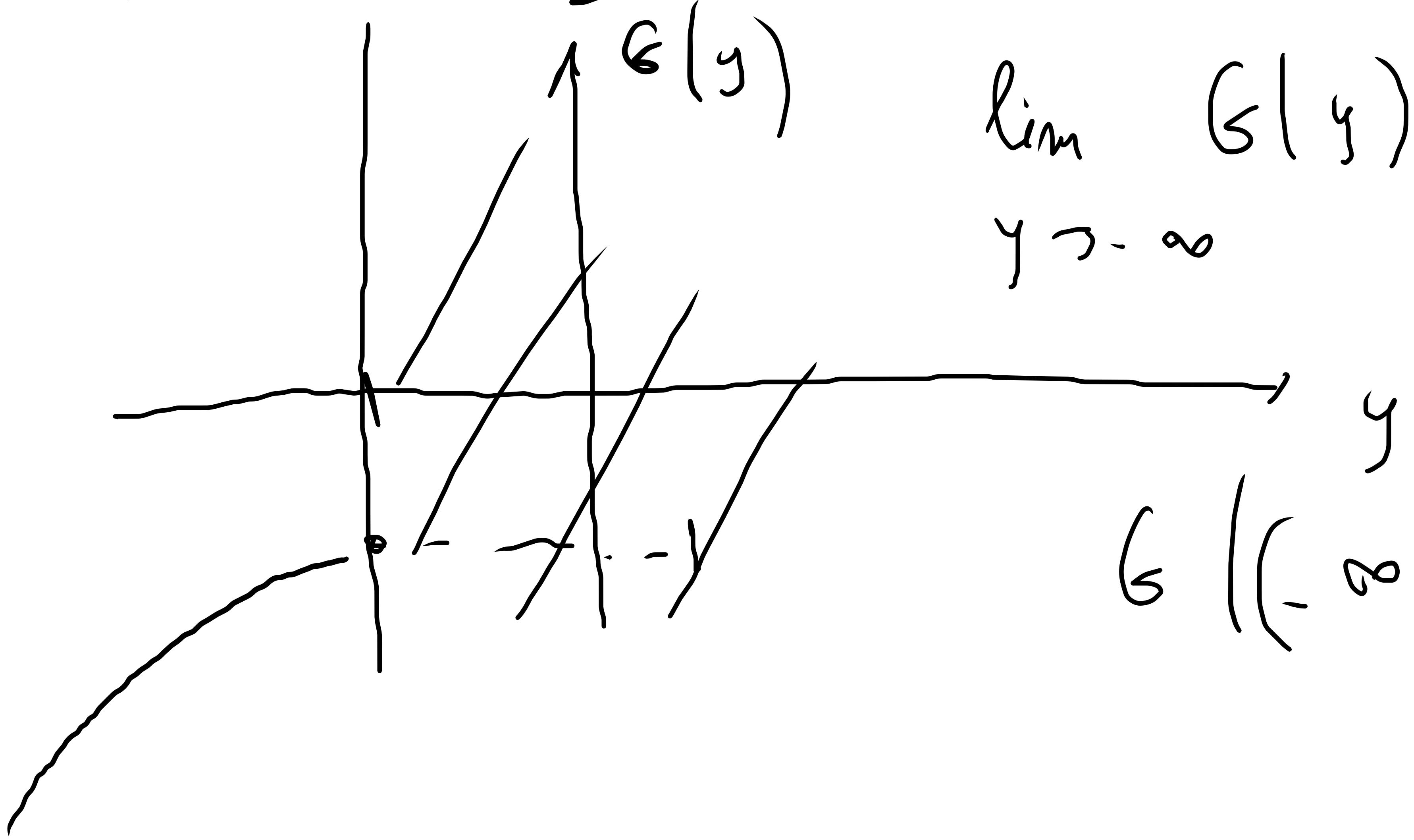
$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\overset{\to -1}{y(x)}}{y(x)+1} \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} -\infty$$

~~Случай 2.3~~ $\cancel{-\frac{\pi}{2} + c(x_0, y_0) > -1}$.

Случай 3 $\quad y_0 < -1 \Rightarrow y(x) < -1.$

$y \uparrow$

$$G(y) = y + \ln(-y) = F(x) = \operatorname{arctg} x + C$$




$$\lim_{y \to -\infty} G(y) = -\infty, \quad \lim_{y \to -1} G(y) = -1$$

$$G((-\infty, -1]) = (-\infty, -1]$$

Случаи 3.1., 3.2 - разобрать.